Singularities in Witten type Topological Field Theory

(Witten 型位相的場の理論における特異性)

学位論文内容の要旨

位相的場の理論は微分位相幾何の研究に大きく貢献してきた。特に、4次元位相的場の理論による研究は、近年著しい進歩をとげている。4次元の微分位相幾何は、Donaldson によって、従来の交叉の理論やロホリンの定理から本質的な進歩が遂げられた。Donaldson 理論は Witten によって位相的非可換ゲージ理論として理解されている。Witten はさらに、Seiberg-Witten 理論をもちいてゲージ対称性を $U(1)$ に破り、Donaldson 理論と同様の結果を可換群の範囲で求めうる可能性を予言した。これら諸理論の関係の、位相的場の理論による理解も進展しつつある。このように位相的場の理論の解明は様々な知見をもたらしてくれる。特異点の周りでの位相的場の理論の振る舞いを調べることで、位相不変量の関係式や物理理論との関連を調べることがこの論文の目的である。

Witten 型位相的場の理論の持つ特異点は、場の理論の観点から見ると単に Gribov ゼロモードが原因であるように思える。しかし、Witten 型位相的場の理論を Mathai-Quillen 形式によってオイラー形式のポアンカレ双対とみなすことで、幾何学的に解釈できる。その観点からすると特異点は2種類あることが分る。一つは、モジュライ空間が可約接続の存在によって特異点を持つ場合。もう一つは、モジュライ空間が0でない次元を持つときに、場の理論の技術的な問題（ゲージ固定の際に現れる Gribov ゼロモードによる発散）としてあらわれる、特異点である。これら2種類の特異点それぞれについて、具体的なモデルに適用してみる。

最初のタイプの特異点を持つ Topological QCD について、無限小の外場による摂動を加えて、4次元の位相不変量の振る舞いを調べた。Topological QCD はその内部に、非可換ゲージ理論に拡張された Seiberg-Witten 理論を含んでいることから以下のことが明らかになった。

- Seiberg-Witten 不変量と Donaldson 不変量の関係が成立する為には、質量項が本質的な役割を必ずしも果たさないことを明らかにし、実際質量を持たない Topological QCD でそれぞれからの寄与を分ける事に成功した。
- 非可換ゲージ理論に拡張された Seiberg-Witten 理論、Donaldson 不変量、可換 Seiberg-Witten 不変量と Topological QCD の関係式を発見した。
- 可換 Seiberg-Witten 不変量に対する幾つかの公式が求まった。

次に、2番目の特異点について位相的重力理論で調べてみる。位相的場の理論において、古典的作用はトポロジカルなものであり、そのトポロジカルな対称性をゲージ固定するのだが、その選び方によっては、Faddey Popov 行列が0固有値をもつ。このことは、幾何学的立場から見ると、モジュライ空間が0でない次元をもつことに対応する。Gribov ゼロモードと呼ばれるこの0固有値状態の存在が、BRS対称性を破りその結果位相的対称性を破ることが実現可能であることが知られていた。この事実を3次元以上の位相的重力理論に応用して、以下のような性質をもつことを明らかにできた。

- 理論のコンフォーマルモードのゲージ固定にスカラー曲率が一定という条件をもちいた際、アインシュタイン方程式の解が存在が Gribov ゼロモードを生じさせ、位相的対称性の破れる理論になる。
- Gribov ゼロモードによる BRS 対称性（今の場合は位相的対称性）の破れは、物理状態の定義の破綻を意味するとともに物理量の発散の困難をひきおこが、その解決として新しい BRS オペレーターによる物理状態の再定義と、発散の処理の実行が可能であることを示した。
- 位相的対称性の破れた phase で理論が アインシュタイン方程式の解のみからの寄与しか受けないように構築できる、すなわち半古典アインシュタイン重力としての解釈できることがわかった。

このように、位相的場の理論の特異点の周りでの振る舞いは、様々な位相幾何学的情報を与えるばかりではなく、位相的対称性の破れた種々の理論が得られることが分った。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 石 川 健 三
副 査 教 授 河 本 昇
副 査 教 授 藤 本 正 行
副 査 助 教 授 鈴 木 久 男

学 位 論 文 題 名

Singularities in Witten type Topological Field Theory

(Witten 型位相的場の理論の特異性)

物理学では法則が物理量の定量的変化に対する方程式で与えられ、通常解析的手法が使われてきた。ところが、近年トポロジック的手法が物理の理解に役立つことが分かってきた。場の理論として、位相不変な性質を持つトポロジカルな場の理論は、低次元トポロジックや様々な自然現象と関係した興味深いものである。

トポロジカルな場の理論は通常の場合の理論と異なり、微少振動の自由度を持たず、時空や力学変数の大域的な性質にのみ依存する性質を持つ力学系を表す理論であり、その性質解明や、応用についての研究が近年急速に進んできた。トポロジックは今まで自然科学であまり使われて来なかったが、トポロジックと関連する自然現象が存在するこゝろが分かってき、トポロジカルな場の理論の解明の研究が必須となってきた。また組み紐の分類の理論として発展したJones多項式やDonaldson多項式理論がWittenによってChern-Simons非可換ゲージ理論を使って拡張されると共に新しく定式化され、トポロジカルな場の理論の研究は極めて活性化された。しかしながら、トポロジカルな対称性の自発的破れやトポロジカルな場の理論の特異点での振る舞い等については今まであまり手がつけられて来なかった。また、トポロジカルな場の理論は重力を初めとする通常の場合の量子論としては定式化に困難をきたす力学系で威力を発揮する可能性がある。この方向の研究では、対称性の自発的破れ等の問題の解明が不可欠である。

申請者佐古彰史氏は本論文でWitten型のトポロジカルな場の理論の特異点での性質解明をおこない、位相不変量の関係式や物理理論との関連を明らかにした。特異点として、ゲージ固定の際現われるGribov零モードによる特異点とゲージ理論における可約接続の存在による特異点との2点について考察した。第一の項目では、Gribov零モードによりトポロジカルな対称性が自発的に破れることを示すと共に、対称性が自発的に破れた理論の構成を行なった。第二の項目では、質量を持たないトポロジカルなゲージ理論において、可約接続の存在による特異点の解析を行ない、Seiberg-Witten不変量、Donaldson不変量間の新しい関係をみいだした。

Gribov特異点に関しては、トポロジカルな重力理論を解析した。ゲージ固定する際現われるFaddeev Popov行列が零固有値を持つ時、BRS対称性が破れ、その結果トポロジカルな対称性の自発的破れが起きることが知られていた。これを、3次元以上のトポロジカルな重力理論に適用し、理論のコンフォーマルモードのゲージ固定にスカラー曲率が一定の条件をかした際、アインシュタイン方程式の解の存在がGribov零モードを生じさせること、またBRS対称性の破れが引き起こされるため生ずる物理状態の定義の破綻がBRS演算子を再定義することにより回復されること、さらにこの際分配関数には、アインシュタイン方程式の解のみが寄与することを明らかにした。これはまだ現実の世界に適用出来る理論とはなっているかどうか不明だが、トポロジカルな対称性を破った有意な理論を作れることが示された。

モジュライ空間が可約接続の存在によって特異点を持つ理論として質量を持たないトポロジカルな非可換ゲージ理論が解析され、分配関数がいくつかの項に分離でき、さらに作用に微少な項を加えることにより非可換Seiberg-Witten理論 Donaldson不変量、可換Seiberg-Witten不変量とトポロジカルな非可換ゲージ理論の関係式が見つけれられた。また可換Seiberg-Witten不変量に対する幾つかの新しい公式が求められた。よってトポロジカル不変量について新しい解析法と新しい関係式が見いだされた。

これを要するに、著者は位相的場の理論に関して特異点のまわりでの振る舞いについてトポロジカルな対称性を破った有意な理論を作れることを示し、また様々な新しい位相幾何学的情報をえるという新知見を得たものであり、場の理論の理解に対して貢献するところ大なるものがある。

よって著者が北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。