

学 位 論 文 題 名

CL-shellability of ordered structure of reflection systems

(鏡映系上の順序構造の辞書式枠付可能性)

学位論文内容の要旨

本論文では Coxeter system 上の Bruhat order の定義を, reflection system と呼ばれる Coxeter system の拡張概念にまで拡張, その順序が CL-shellability と呼ばれる組合せ論的性質を満たしていることを証明した. 現代の代数的組合せ論の中心概念の一つに, Cohen-Macaulay 半順序集合がある. これは, 組合せ論と可換環論その他の代数学を結ぶ重要な概念であり, 多くの深い結果が生み出されている最も盛んな研究分野の一つである. その Cohen-Macaulay 半順序集合の重要なクラスに, CL-shellable 半順序集合がある. 冗長になるので細かい定義は省くが, 簡単に述べると有限な半順序の極大な全順序部分集合 (以下, 極大鎖) にある組合せ論的条件を満たすラベルを許すものとして定義される. 一般の Cohen-Macaulay 性の定義は大きく分けて可換環を用いるものと, 位相幾何学的な概念を用いるものの二通りの方法があるが, それにより与えられた半順序集合が Cohen-Macaulay であるかどうかを判定するのは容易ではない. 一方 CL-shellability はその定義が全く組合せ論的なものなので扱いやすく, またそれ自体からもその順序集合の Möbius 関数や, 或いは幾何学的性質に関する多くの情報を引き出せるため, 非常に多くの研究が続けられている. その中で最も有名な結果の一つに, 「Coxeter system の Bruhat order は CL-shellable」 という Björner-Wachs の結果がある. 本論文はこの結果を reflection system 上にまで拡張した. そこで reflection system の定義を述べる.

(X, E) は X を頂点集合, E を辺集合とする有限無向グラフとする. ここで次の二つの関数を考える: $f: X \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$, $g: E \rightarrow \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 3\} \cup \{\infty\}$, ただし $\{x, y\} \in E$ かつ $g(\{x, y\}) \neq \infty$ のとき $f(x) = f(y) = 2$ とする. そこで G を X 上に次の基本関係式で生成される群とする:

1. $x^{f(x)} = 1 \ (x \in X),$
2. $xy = yx \ (x, y \in X, \{x, y\} \notin E),$
3. $(xy)^{g(\{x, y\})} = 1, (\{x, y\} \in E, g(\{x, y\}) \neq \infty).$

このとき, (G, X) を reflection system と呼ぶ. ここで関数 f が常に値 2 をとるとき (G, X) は Coxeter system になるので, reflection system は Coxeter system の拡張概念になっている. G は X で生成されているので, G の任意の元 g は $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \ (x_i \in X)$ とあらわせるが, 任意の $x \in X$ は位数が有限なので各 n_i は正整数としてよい. さらに上の表示において $\sum_{i=1}^m n_i$ または m が最小になるものを, それぞれ g の reduced expression, ℓ_1 -reduced expression と呼び, reduced expression の長さ $\sum_{i=1}^m n_i$ を $\ell(g)$ で表す. また reduced かつ ℓ_1 -reduced なものを strongly reduced と呼ぶ. この reflection system (G, X) に次のようにして半順序を定義する. $T = \bigcup_{g \in G} gXg^{-1}$ とおく. このとき $g, h \in G$ に対して

$$g \rightarrow h \iff \text{ある } t \in T \text{ が存在し } h = t^{-1}g, \ell(t^{-1}g) = \ell(g) - 1 \text{ を満たす.}$$

そしてさらに

$$g > h \iff g = \xi_0 \rightarrow \xi_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{r-1} \rightarrow \xi_r = h \text{ なる } \xi_1, \dots, \xi_{r-1} \in G \text{ が存在する}$$

とおくと, $g \geq h$ は G 上の半順序を与える. この順序について G 上の任意の閉区間 $[h, g] = \{\xi \in G \mid h \leq \xi \leq g\}$ は有限な半順序集合をなすので, ここの極大鎖の各辺にラベルを付ける. そのためには, $g \rightarrow h$ に対して以下でラベルをつけてやれば十分である. そこで strongly reduced expression $g = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$ を一つ固定しておく. このとき $g \rightarrow h$ より $h = x_1 \cdots x_{i-1}^{n_{i-1}} x_i^{n_i-1} x_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots x_m^{n_m}$ であることが示され, かつ $g = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$ が strongly reduced であることから i は一意的に定まることがわかる. このとき $g \rightarrow h$ に整数 $n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1$ を対応させる. 以上のように定めておけば, $[h, g]$ の任意の極大鎖にラベルと呼ばれる自然数の r -対が対応する ($\ell(g) - \ell(h) = r$ のとき). そしてこうして得た $[h, g]$ のラベリングが CL-shellability の公理を満たすことが示されるのである.

定理 reflection system 上の任意の閉区間は CL-shellable 半順序集合である.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 教 授 寺 尾 宏 明

副 査 教 授 吉 田 知 行

副 査 助 教 授 山 田 裕 史

副 査 教 授 日 比 孝 之 (大阪大学大学院理学研究科)

学 位 論 文 題 名

CL-shellability of ordered structure of reflection systems

(鏡映系上の順序構造の辞書式枠付可能性)

現代の代数的組合せ論の中心概念の一つに、Cohen-Macaulay 半順序集合がある。これは、組合せ論と可換環論その他の代数学を結ぶ重要な概念であり、多くの深い結果が生み出されている最も盛んな研究分野の一つである。その Cohen-Macaulay 半順序集合の重要なクラスに、CL-shellable 半順序集合がある。これは有限な半順序の極大な全順序部分集合にある組合せ論的条件を満たすラベルを許すものとして定義される。一般の Cohen-Macaulay 性の定義は大きく分けて可換環を用いるものと、位相幾何学的な概念を用いるものの二通りの方法があるが、それにより与えられた半順序集合が Cohen-Macaulay であるかどうかを判定するのは容易ではない。一方 CL-shellability はその定義が全く組合せ論的なものであるため扱いやすく、またそれ自体からもその順序集合の Möbius 関数や、或いは幾何学的性質に関する多くの情報を引き出せるため、非常に多くの研究が続けられている。その中で最も有名な結果の一つに、「Coxeter system の Bruhat order は CL-shellable」という Björner-Wachs の結果がある。Coxeter system は群論、代数幾何学等の分野に自然に現れる重要な半順序集合である。本論文では Coxeter system 上の Bruhat order の定義を、reflection system (鏡映系) と呼ばれる Coxeter system の拡張概念にまで拡張、その順序が CL-shellable であることを証明した。

これを要するに、著者は、CL-shellable な新しい半順序集合のクラスを見出したものであり、代数的組合せ論に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものとみとめる。