

学 位 論 文 題 名

The Rohlin Property for $\mathbb{Z}^2$ -Actions on UHF Algebras

(UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ 作用に対する Rohlin の性質)

学位論文内容の要旨

本論文の目的は UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ 作用 (即ち可換である 2 つの自己同型写像) に対して、その反周期性を Rohlin の性質により特徴付ける、いわゆる非可換 Rohlin 型定理を示すことと、またその非可換 Rohlin 型定理を用いて、無限テンソル積型と呼ばれる $\mathbb{Z}^2$ 作用で反周期的なものを分類することである。まず始めに UHF 環 A 上の $\mathbb{Z}^2$ 作用 α は、 $\mathbb{Z}^2$ の原点 $(0,0)$ 以外の任意の点 g に対して、 A 上のトレース状態から決まる弱位相による α_g の拡張が外部的であるとき、反周期的であると呼ばれる。 α が反周期的であることは次のように特徴付けることができる。

定理 1 UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ 作用 α に対して以下は同値である。

- (1) α は反周期的である。
- (2) α は Rohlin の性質を持つ。即ち $\mathbb{N}^2$ の任意の元 m に対して、 m 以上の $\mathbb{N}^2$ の有限個の元 $m^{(1)}, \dots, m^{(R)}$ (ただし $(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2)$ は $m_1 \leq n_1$ かつ $m_2 \leq n_2$ とする) が存在して次の条件を満足する:

任意の正数 ε と任意の A の有限部分集合 F に対して、 A の射影子による 1 の分解

$$\left(e_g^{(r)} \mid r = 1, \dots, R; g \in \mathbb{Z}^2 / m^{(r)} \mathbb{Z}^2 \right)$$

で、各 $r = 1, \dots, R$, $x \in F$, $g \in \mathbb{Z}^2 / m^{(r)} \mathbb{Z}^2$ と $\mathbb{Z}^2$ の標準基底 ξ_i ($i = 1, 2$) に対して

$$\| [x, e_g^{(r)}] \| < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad \| \alpha_{\xi_i}(e_g^{(r)}) - e_{\xi_i+g}^{(r)} \| < \varepsilon$$

となるものが存在する。

次に作用の分類について述べるために、いくつかの用語を定義する。UHF 環 A 上に $\mathbb{Z}^2$ 作用 α, β が与えられたとする。任意の正数 ε に対して A の自己同型写像 γ で $\| \alpha_{\xi_i} - \gamma \circ \beta_{\xi_i} \circ \gamma^{-1} \| \leq \varepsilon$ ($i = 1, 2$) となるものが存在するとき、 α と β は近似的に共役であると呼ばれる。また α に対する 1-コサイクル u (即ち $\mathbb{Z}^2$ から A のユニタリ群 $U(A)$ への写像で $u_{g+h} = u_g \alpha_g(u_h)$ を満たすもの) と A の自己同型写像 γ で、任意の $\mathbb{Z}^2$ の元 g に対して、 $Ad u_g \circ \alpha_g = \gamma \circ \beta_g \circ \gamma^{-1}$ となるものが存在するとき、 α と β はコサイクル共役であると呼ばれる。最後に A のユニタリ元 u_1, u_2 と A の自己同型写像 γ で $Ad u_i \circ \alpha_{\xi_i} = \gamma \circ \beta_{\xi_i} \circ \gamma^{-1}$ ($i = 1, 2$) となるものが存在するとき、 α と β は外部共役であると呼ばれる。明らかにコサイクル共役であるならば、外部共役であるが、さらに次の結果を得る。

定理 2 UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ 作用 α と β に対して、 α と β が近似的に共役であるならば、 α と β はコサイクル共役である。

UHF 環 A 上の $\mathbf{Z}^2$ 作用 α は、ある正の整数列 $(m_k | k \in \mathbf{N},)$ があって

$$A \cong \bigotimes_{k \in \mathbf{N}} M_{m_k}(\mathbf{C})$$

と分解されて、しかも任意の $\mathbf{Z}^2$ の元 g に対して $\alpha_g(M_{m_k}(\mathbf{C})) = M_{m_k}(\mathbf{C})$ となると、無限テンソル積型であると呼ばれる。 α が無限テンソル積型であるとする、各 k に対して $M_{m_k}(\mathbf{C})$ のユニタリ元 $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}$, それに $\mathbf{T}$ の元 λ_k が存在して $\alpha_{\xi_i}[M_{m_k}(\mathbf{C}) = \text{Ad } u_k^{(i)}, u_k^{(1)} u_k^{(2)} = \lambda_k u_k^{(2)} u_k^{(1)}$ となるのが容易にわかる。今、もしすべての k に対して $\lambda_k = 1$ であるとする α に対する Rohlin の性質は次のように特徴付けることができる。

定理 3 α を上に述べたような無限テンソル積型 $\mathbf{Z}^2$ 作用とすると以下は同値である。

- (1) α は Rohlin の性質を持つ。
- (2) 任意の正の整数 m に対して

$$\left(\text{Sp} \left(\bigotimes_{k=m}^n u_k^{(1)}, \bigotimes_{k=m}^n u_k^{(2)} \right) \mid n = m, m+1, \dots \right)$$

が一様に分布する。ここで可換なユニタリ元 u, v に対して $\text{Sp}(u, v)$ は u と v の結合スペクトルを表し、 $\mathbf{T}^2$ の有限列からなる列 $(S_k | k \in \mathbf{N})$, $S_k = (s_{k,1}, \dots, s_{k,n_k}) \subseteq \mathbf{T}^2$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} f(s_{k,p}) = \int_{\mathbf{T}^2} f(s) ds$$

が $\mathbf{T}^2$ 上の任意の連続関数 f に対して成り立つとき、 $(S_k | k \in \mathbf{N})$ は一様に分布すると呼ばれる。定理 1 及び定理 3 より次の結果を得る。

定理 4 UHF 環上の反周期的無限テンソル積型の $\mathbf{Z}^2$ 作用で、可換なユニタリ元から生成されているものはすべて近似的に共役である。

非可換なユニタリ元から生成されている無限テンソル積型の $\mathbf{Z}^2$ 作用の分類は作用する UHF 環の同型類により状況が異なる。UHF 環の同型類は一般化された自然数と呼ばれる非負整数もしくは無限大 ∞ からなる列 $(i_k | k \in \mathbf{N})$ が不変量であることに注意する。ここで $(p_k | k \in \mathbf{N})$ を素数全体からなる増加列とすると、 $(i_k | k \in \mathbf{N})$ には $\text{UHF 環} \otimes_k M_{p_k}(\mathbf{C})$ を対応させる。このとき次の分類を得る。

定理 5 UHF 環 A の不変量を $(i_k | k \in \mathbf{N})$ とすると次が成り立つ。

- (1) $\#\{k \in \mathbf{N} | 1 \leq i_k < \infty\} = \infty$ ならば、 A 上の反周期的無限テンソル積型 $\mathbf{Z}^2$ 作用の外部共役類は無限個存在する。
- (2) $\#\{k \in \mathbf{N} | 1 \leq i_k < \infty\} < \infty$ かつ A が無限次元であるならば、 A 上の反周期的無限テンソル積型 $\mathbf{Z}^2$ 作用の外部共役類は唯一存在する。
- (3) A が有限次元であるならば、 A 上反周期的な $\mathbf{Z}^2$ 作用は存在しない。

ここで集合 S に対して、 $\#S$ は S の元の個数を表すものとする。

学位論文審査の要旨

主査	教授	岸本晶孝
副査	教授	井上純治
副査	教授	中路貴彦
副査	教授	林実樹廣
副査	助教授	山ノ内毅彦

学位論文題名

The Rohlin Property for $\mathbb{Z}^2$ -Actions on UHF Algebras

(UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ 作用に対する Rohlin の性質)

作用素環上の自己同型写像や自己同型写像群の分類は、Connes による 1970 年代の画期的仕事に端を発する。彼は II_1 型 AFD 因子環に対して自己同型写像の外部共役類を完全に決定し、その過程において、測度空間の変換に対する Rohlin の性質といわれるものを、その理論の非可換版ともみなされる因子環の理論に成功裡に導入した。その後の因子環の場合の研究において、いろいろな状況で鍵となったのがこの性質であり、多くの労力はこの性質の成立条件を明らかにすることに費やされた。現在では、なかでも AFD 因子環上の従順離散群の作用の分類理論はほぼ完結した。

それに対して C^* 環の場合には、1980 年代半ばに Rohlin の性質がある形で定義されその意味するところが探求されてはいたが、因子環に対すると同様の態度で Rohlin の性質に迫ろうとする試みは最近までなかった。それは C^* 環の位相的性格のためにその一般的成立がほとんど不可能であると思われていたためだろうが、1992 年になって特殊な例ではあるが初めて非自明な結果が得られ、その後、(C^* 環の特殊なクラスである) UHF 環の自己同型写像の場合にはその成立条件があきらかになった。(UHF 環とは行列環の無限テンソル積として得られるような C^* 環のことである。) 顕著な結果としては、この性質がごく普通になりつつこと、この性質をもつ自己同型写像の外部共役類はただひとつであること、などである。(しかしこの性質をもたない自己同型写像についてよく分かっていないため、分類理論はまだ完結していない。)

申請者は、上述の流れにそって、UHF 環上の $\mathbb{Z}^2$ の作用を初めて研究の対象としてとりあげ、Rohlin の性質と分類理論を探求した。($\mathbb{Z}$ は整数群を表し、 $\mathbb{Z}^2$ は 2 次元整数群を表す。 $\mathbb{Z}^2$ の作用を考えることは、互いに可換なふたつの自己同型写像を考えることに対応する。)

申請者はまずこの場合における妥当な Rohlin の性質を正確に定義したあと、作用がこの条件を満たすための必要かつ十分条件を明らかにした。この条件は UHF 環の (一意的な) トレース表現における作用の性質 (例えばその UHF 環から生成された因子環上の作用として Rohlin の性質をもつという性質) で記述

される。これは結果としては自己同型写像（つまり Z ）の場合から予想できることではあるが、証明にいくつかの工夫を要する。これによって、例えば Z^3 の作用に対して Rohlin の性質に関する結果を証明することの困難さの理由も明らかになった。（同時に、このことは Z に対すると同じ完成度で Z^2 の場合を究めることの困難さを示す。）次に、自己同型写像でも無限テンソル積型のもののみを対象として取り上げ、それが Rohlin の性質をもつための簡単な判定条件を与え、（あるクラスの UHF 環に対して）その性質をもつものの外部共役類を決定した。とくにその UHF 環の性質によって外部共役類が無限に存在することも、ただひとつだけ存在することもあることを明らかにして、 Z の場合との相違を際立たせた。この結果の証明は技術的に複雑かつ微妙な点が多く申請者が解析的能力にたけることを示している。

以上の結果は、UHF 環上の Z^2 の作用、ひいてはもっと一般の離散群の作用の分類理論の端緒としては十分な結果を与えるものである。よって審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。