

## 学 位 論 文 題 名

## Study on lifespan of solutions to quasilinear wave equations

(準線型波動方程式の解の lifespan についての研究)

## 学位論文内容の要旨

本論文は二次元空間における準線型波動方程式の初期値問題について研究したものである。その目的は、十分小さい任意の初期値に対して古典解が存在する最大の時刻 (lifespan) を評価することである。考えている方程式が双曲性を保つために、初期条件は小さいもののみ考える。具体的には次のような方程式を考える:  $\square u \equiv \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = F(u')u''$ 。ここで  $u'$  および  $u''$  はそれぞれ  $u$  の時空の一階および二階偏導関数とし、 $F(u')$  は  $u'$  の二次以上の多項式とする。この方程式は、物理的に意味のある例としては、膜の振動を記述する方程式を含んでいる。滑らかで台コンパクトな関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  を任意に取り、 $t = 0$  での初期条件を  $u(x, 0) = \varepsilon f(x)$ 、 $\partial_t u(x, 0) = \varepsilon g(x)$  とする。ただし  $\varepsilon$  は小さなパラメータとし、この初期値問題の古典解の lifespan を  $T(\varepsilon)$  で表すことにする。 $F(u')$  が三次以上の多項式である場合は十分小さい  $\varepsilon$  に対して  $T(\varepsilon) = \infty$  となることが知られている。この意味で著者が考えている状況は critical case と言える。また、これまでなされてきた lifespan の評価に関する研究は、 $\varepsilon$  に関する依存の度合に注目したものが主だったが、本論文ではさらに  $f(x)$ 、 $g(x)$  および非線型項の主要項に関する依存の様子も調査し、より精密な評価を得ることを目的としている。

Part I では lifespan の下からの評価として  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) \geq 1/H$  を得ている。ただし  $H$  は  $f(x)$ 、 $g(x)$  および  $F(u')$  の二次の項の係数により具体的に表すことのできる正の定数である。さらに、この結果から予想される通り  $H = 0$  となるときは十分小さい  $\varepsilon$  に対して  $T(\varepsilon) = \infty$  となることも証明している。 $H = 0$  となるための  $F(u')$  の条件を null-condition と呼ぶ。すなわちこの結果は、null-condition を満たすような特殊な非線型項に対しては古典解が時間大域的に存在することを示している。

Part II の前半では本論文の中核でもある、lifespan の上からの評価について研究している。解が空間的に球対称な解であり非線型項が null-condition を満たさない場合、 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) \leq 1/H$  という評価を得ている。ここで  $H$  は Part I で現れたものと同じ定数である。したがって Part I で得た結果とあわせると、球対称解の lifespan に対しては  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) = 1/H$  が成り立つことがわかる。これはこの評価が最適であることを意味している。なお、lifespan の上からの評価は、時刻  $t$  が  $T(\varepsilon)$  に近づくにつれて、解の二階偏導関数が特性線に沿って限りなく無限

大に近づくことにより得られる。このとき、解自身および解の一階偏導関数は減衰している。この事実は膜の振動の方程式にあてはめると次のように解釈できる。膜の振動の方程式の解は膜の垂直方向の変位を、一階偏導関数は膜の傾き具合を、そして二階偏導関数は膜の曲率を表している。したがってたとえば太鼓をたたいたとき、時間が経つにつれて振幅はだんだん小さくなるが、ある時ある点で曲率が無限大になり、しかもその特異点は太鼓をたたいた点から離れる方向に伝播されるのである。

また Part II の後半では、時刻  $T(\varepsilon)$  付近での解の漸近挙動について研究している。ここでは、特性線に沿う解の二階偏導関数の具体的な表示を得ることにより、解がどの程度のオーダーで発散するかを明らかにしている。

以上の本論文の研究により、二次元空間における準線型波動方程式の解の lifespan に対する最適な評価を得ることに成功した。

# 学位論文審査の要旨

主 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 久保田 幸 次

副 査 教 授 儀 我 美 一

副 査 教 授 小 澤 徹

## 学 位 論 文 題 名

### Study on lifespan of solutions to quasilinear wave equations

(準線型波動方程式の解の lifespan についての研究)

本論文は二次元空間における準線型波動方程式の初期値問題について研究したものである。その目的は、十分小さい任意の初期値に対して古典解が存在する最大の時刻 (lifespan) を評価することである。考えている方程式が双曲性を保つために、初期条件は小さいもののみ考える。具体的には次のような方程式を考える： $\square u \equiv \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_2^2 u = F(u')u''$ 。ここで  $u'$  および  $u''$  はそれぞれ  $u$  の時空の一階および二階偏導関数とし、 $F(u')$  は  $u'$  の二次以上の多項式とする。この方程式は、物理的に意味のある例としては、膜の振動を記述する方程式を含んでいる。滑らかでコンパクトな関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  を任意に取り、 $t = 0$  での初期条件を  $u(x, 0) = \varepsilon f(x)$ 、 $\partial_t u(x, 0) = \varepsilon g(x)$  とする。ただし  $\varepsilon$  は小さなパラメータとし、この初期値問題の古典解の lifespan を  $T(\varepsilon)$  で表すことにする。 $F(u')$  が三次以上の多項式である場合は十分小さい  $\varepsilon$  に対して  $T(\varepsilon) = \infty$  となることが知られている。この意味で著者が考えている状況は critical case と言える。また、これまでなされてきた lifespan の評価に関する研究は、 $\varepsilon$  に関する依存の度合に注目したものが主だったが、本論文ではさらに  $f(x)$ 、 $g(x)$  および非線型項の主要項に関する依存の様子も調査し、より精密な評価を得ることを目的としている。

Part I では lifespan の下からの評価として  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) \geq 1/H$  を得ている。ただし  $H$  は  $f(x)$ 、 $g(x)$  および  $F(u')$  の二次の項の係数により具体的に表すことのできる正の定数である。さらに、この結果から予想される通り  $H = 0$  となるときは十分小さい  $\varepsilon$  に対して  $T(\varepsilon) = \infty$  となることも証明している。 $H = 0$  となるための  $F(u')$  の条件を null-condition と呼ぶ。すなわちこの結果は、null-condition を満たすような特殊な非線型項に対しては古典解が時間大域的に存在することを示している。

Part II の前半では本論文の中核でもある、lifespan の上からの評価について研究している。解が空間的に球対称な解であり非線型項が null-condition を満たさない場

合、 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) \leq 1/H$ という評価を得ている。ここで  $H$  は Part I で現れたものと同じ定数である。したがって Part I で得た結果とあわせると、球対称解の lifespan に対しては  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log(1 + T(\varepsilon)) = 1/H$  が成り立つことがわかる。これはこの評価が最適であることを意味している。なお、lifespan の上からの評価は、時刻  $t$  が  $T(\varepsilon)$  に近づくとつれて、解の二階偏導関数が特性線に沿って限りなく無限大に近づくとにより得られる。このとき、解自身および解の一階偏導関数は減衰している。この事実は膜の振動の方程式にあてはめると次のように解釈できる。膜の振動の方程式の解は膜の垂直方向の変位を、一階偏導関数は膜の傾き具合を、そして二階偏導関数は膜の曲率を表している。したがってたとえば太鼓をたたいたとき、時間が経つにつれて振幅はだんだん小さくなるが、ある時ある点で曲率が無限大になり、しかもその特異点は太鼓をたたいた点から離れる方向に伝播されるのである。

また Part II の後半では、時刻  $T(\varepsilon)$  付近での解の漸近挙動について研究している。ここでは、特性線に沿う解の二階偏導関数の具体的な表示を得ることにより、解がどの程度のオーダーで発散するかを明らかにしている。

以上の本論文の研究により、二次元空間における準線型波動方程式の解の lifespan に対する最適な評価を得ることに成功した。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。