

学 位 論 文 題 名

Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems

(反応拡散方程式系における定常界面パターンの漸近的特徴づけ)

学位論文内容の要旨

パターン形成問題の数理的な見地からの説明を最初に試みたのは、チューリングである。彼は抑制因子が活性化因子よりも速く拡散するならば、拡散誘引不安定性によって空間非一様なパターンが形成されることを発見した。これを説明する典型的なモデル方程式系は、次の活性化因子-抑制因子モデルである

$$(1) \quad \begin{cases} u_t = \varepsilon^2 \Delta u + f(u, v), \\ v_t = D \Delta v + g(u, v). \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

ここで境界条件は Neumann 境界条件とする。 u は活性化因子、 v は抑制因子、 $\delta > 0$ 、 ε は十分小さい正のパラメータ、 Δ はラプラシアン、 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ は有界領域で $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。 (f, g) の詳細な仮定は主論文に譲るが、例えば $f(u, v) = u(1-u)(u-a) - v$ ($0 < a < 1$)、 $g(u, v) = u - \gamma v$ ($\gamma > 0$) を考えれば十分である。(1) の解 u^ε において内部遷移層、すなわち異なる 2 つの様な状態をつなぐ部分、が現れたときパターンが形成されたとみなす。特に u^ε の等高面 (上の具体例では $u^\varepsilon = 1/2$) を界面と呼び Γ^ε と表す。

(1) は拡散係数や反応の比の違いによって、動的にも静的にも様々なパターンを示すが、我々は特に高次元空間における定常パターンの考察に焦点をあてる。このとき最も基本的な問題は、

- (I) 十分小さい ε に対して (1) の安定な定常解の ε -族は存在するか?
 (II) もし存在したとすれば $\varepsilon \downarrow 0$ としたときの漸近形はどのようなものか?

というものである。数値シミュレーションの結果から、六角形、縞状形、蛇行形など様々なパターンが観察されることが知られている。それゆえ十分小さい ε に対して (1) は非常に多くの定常解をもち、いったん $\varepsilon \downarrow 0$ の漸近形がわかれば定常解は本質的な困難なく構成されるように思われる。実際空間 1 次元の場合、Fife、三村・田端・細野、伊藤らは特異摂動法を用いて、そのような漸近形より十分小さい $\varepsilon > 0$ での解の存在を構成的に示した。さらにそれらの特異摂動解の安定性問題は、西浦・藤井により開発された特異極限スペクトル法 (SLEP 法) によって一般的に解決された。また、坂元は分岐論的手法により定常解の存在証明とその安定性の判定を同時に行っている。これに対し、(1) の高次元空間における定常解の存在やその安定性についてはほとんど知られていない。その主たる理由は、曲線や曲面といった無限の自由度をもつ Γ_0 を自由境界とする、ある種の自由境界値問題を解くことが、一般には非常に困難であることによる。

基本的問題 (I) に関して西浦・鈴木により得られた結果は否定的である。

定理 A. Γ^ε 、 Γ_0 とともにコンパクト、滑らかで $\mathbf{R}^N$ に埋め込まれた $N-1$ 次元多様体とし、

それらに囲まれる領域は単連結とする。このとき滑らかな極限界面 Γ_0 (Γ^ε の $\varepsilon \downarrow 0$ における極限)をもつ(1)の特異摂動定常解($u^\varepsilon, v^\varepsilon$)は、 ε を十分小さくすれば必ず不安定化する。

定理 A は、安定な特異摂動定常解の界面は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき微細にかつ複雑になることを示唆しており、その極限形をとらえるためには空間のリスケーリングが必要であると考えられる。実際 Ω が矩形領域とすると、 $\varepsilon \downarrow 0$ のとき平面波解は不安定化しその最大成長波長は $O(\varepsilon^{1/3})$ であることが、谷口・西浦によって示されている。このことから Ω が一般の高次元領域の場合にも $O(\varepsilon^{1/3})$ がリスケーリングの尺度の候補であると考えられる。

適当な仮定のもとで、新しい空間変数 $X = (x - x^*)/\varepsilon^{1/3}$ ($x^* \in \mathbb{R}^N$) を導入し変数変換を行うと、(1)を次の形に書き換えることができる：

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{u}_t = \tilde{\varepsilon}^2 \Delta_X \tilde{u} + f(\tilde{u}, \tilde{v}), \\ \delta \tilde{v}_t = D \tilde{\varepsilon}^{-1} \Delta_X \tilde{v} + g(\tilde{u}, \tilde{v}). \end{cases} \quad (X, t) \in \Omega^* \times (0, \infty),$$

境界条件は(1)と同じく Neumann 境界条件とする。ここで Ω^* はリスケーリングされた領域とし、 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^{2/3}$ である。以下 Δ 、 Γ_0 、空間変数 x は(1)と同じ記号を用いる。

本論文において鈴木は、(2)に対して、(i) リスケーリングされた極限界面の決定方程式の導出、および(ii) (2)の特異摂動定常解の存在を仮定したとき、その安定性を判定する線形化固有値問題の特異極限形(特異極限固有値問題)の導出、を行った。結果は次の通りである。

定理 B. (i) 界面 Γ^ε の極限形 Γ_0 を決定する、リスケーリングされた縮約問題は次で与えられる

$$(3) \quad \begin{cases} D \Delta v_1^\pm = -g(h_\pm(v^*), v^*) & \text{in } \Omega^{\pm}, \\ v_1^\pm = \beta^*(N-1)H_0, \quad \frac{\partial v_1^+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_1^-}{\partial \nu} \text{ on } \Gamma_0, \quad \frac{\partial v_1^-}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega^*. \end{cases}$$

ただし、 Ω^{++} は Γ_0 で囲まれた有界領域、 $\Omega^{*-} = \Omega^* \setminus \Omega^{++}$ 、 H_0 は Γ_0 の平均曲率、 ν 、 n はそれぞれ Γ_0 、 $\partial\Omega^*$ の外向き法ベクトルである。

(ii) 極限界面 Γ_0 をもつ定常解のまわりにおける、(2)の線形化固有値問題を考える。このときその特異固有値 λ^ε と固有関数($w^{(n)}(x, \varepsilon)$, $z^{(n)}(x, \varepsilon)$)の主要部は次の形をもつ：

$$w^{(n)}(x, \varepsilon) \approx \begin{cases} \omega\left(\frac{Y(x)}{d}\right) \frac{\dot{\phi}_0(Y(x)/\varepsilon)}{\dot{\phi}_0(0)} \Theta_0^{(n)}(S(x)), & x \in U_d(\Gamma_0), \\ 0, & x \in \Omega^* \setminus U_d(\Gamma_0), \end{cases}$$

$$z^{(n)}(x, \varepsilon) \approx -\varepsilon^2 \frac{1}{D} \frac{[g]}{\dot{\phi}_0(0)} K_N^*(\delta_{\Gamma_0} \otimes \Theta_0^{(n)}), \quad \lambda^\varepsilon \approx \varepsilon^2 \lambda_2^{(n)}.$$

ここで、 $(\lambda_2^{(n)}, \Theta_0^{(n)})$ は次で与えられる Γ_0 上の固有値問題の第 n 固有値と固有関数である：

$$L^* \Theta_0^{(n)} + \frac{1}{D} c_2 [g] J'(v^*) \langle K_N^*(\delta_{\Gamma_0} \otimes \Theta_0^{(n)}), \delta_{\Gamma_0} \rangle = \lambda_2^{(n)} \Theta_0^{(n)}, \quad \int_{\Gamma_0} \Theta_0^{(n)} dS = 0.$$

ただし、 $U_d(\Gamma_0)$ は Γ_0 のある局所近傍、 $(S(x), Y(x))$ は Γ_0 の近傍における局所座標変換、 $\omega(y)$ は cut off 関数、 K_N^* はある正值作用素の逆作用素、 $L^* \equiv \Delta^{\Gamma_0} + \frac{1}{2} H_1(s) - c_1 P_3(s) + \hat{\Lambda}(s)$ 、 Δ^{Γ_0} は Γ_0 上定義されたラプラス・ベルトラミ作用素、 $H_1(s)$ は Γ_0 の主曲率の2乗和、などである(詳しくは主論文の§3を参照されたい)。

(3)は(2)に関する極限界面 Γ_0 を決定する方程式であり、特異摂動法を用いて定常解を構成する上で基本的かつ重要な問題である。また、(ii)から固有関数の $\tilde{u}$ -成分の主要部は変数分離形であること、すなわち界面に関して法線方向成分と接線方向成分の積に分解されることがわかる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 西 浦 廉 政

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 儀 我 美 一

副 査 助 教 授 神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

Asymptotic characterization of stationary interfacial patterns for reaction diffusion systems

(反応拡散方程式系における定常界面パターンの漸近的特徴づけ)

パターン形成問題の数理的な見地からの説明を最初に試みたのは、チューリングである。彼は抑制因子が活性化因子よりも速く拡散するならば、拡散誘引不安定性によって空間非一様なパターンが形成されることを発見した。これを説明する典型的なモデルは、活性化因子-抑制化因子モデルとよばれる半線形放物型の反応拡散方程式系で与えられる。この方程式系は拡散係数や反応の比の違いによって、動的にも静的にも様々なパターンを示すが、申請者は高次元の定常解の漸近形及びその安定性についての基本的結果を与えた。ここでいう漸近形とは活性化因子の拡散係数（これを ε とする）が 0 となる極限におけるものをいう。

高次元空間における定常パターンに関する最も基本的な問題は、どのような形状の解が許されるのか、またそれらから安定解を取り出す判定法を確立することである。空間 1 次元の場合、Fife、三村・田端・細野、伊藤らは特異摂動法を用いて、十分小さい $\varepsilon > 0$ での解の存在を構成的に示した。さらにそれらの特異摂動解の安定性問題は、西浦・藤井により開発された特異極限スペクトル法 (SLEP 法) によって一般的に解決された。これに対し、高次元空間における定常解の存在やその安定性についてはこれまでほとんど知られていない。その主たる理由は、曲線や曲面といった無限の自由度をもつ自由境界とする、ある種の自由境界問題を解くことが、一般的に非常に困難であること、及びそれに伴う安定性に関わる固有値の数が無限個になり、それらを統御された形で解析することが困難であることによる。

申請者はこれらの問題を考察するにあたり、まず定常解が存在するとすればどのようなスケールで現れるかを考察し、西浦との共同研究により安定な定常解は $\varepsilon \downarrow 0$ のとき有限の特徴的サイズをもち得ないことを証明した。これは安定な定常解はもし存在するとしても、 ε とともに無限に細かい界面パターンになることを示唆している。従って漸近形を特徴付けるためには適当な空間のリスケーリングを行う必要がある。

申請者は、空間のリスケーリングにふさわしいものとして $O(\varepsilon^{1/3})$ を導入することにより、安定な定常解の漸近形を特徴付ける縮約された定常自由境界問題を導出することに成功した (定理

B(i), Proposition 2.5)。それは結晶成長等の他の自由境界問題で得られるものと密接に関連しており、特異極限においてはモデルの出自によらない普遍的な形になることが示唆され、新しい知見を与えている。この導出の際に用いられた手法は接合漸近展開法と呼ばれるものであり、1次元においては既に開発されていたが、高次元空間における反応拡散方程式系に対し組織的にこの展開を実施できたことの貢献は大きい。この縮約問題を解くことにより原理的には安定な定常界面の完全分類をおこなうための数学的基盤が与えられたことになる。

さらに申請者は上で導出された定常自由境界問題の解で与えられる形を漸近形とする反応拡散方程式系の解の安定性の判定法を与えた（定理 B(ii)）。それは対応する線形化固有値問題の極限界面上での固有値問題を主要部とするものであり、その漸近形は変数分離形となる。これは具体的に形状が与えられた時の固有値計算のアルゴリズム同時に与えるものである。

以上の結果は、高次元空間における反応拡散方程式系の定常解の漸近形とその安定性理論に新知見を得たものであり、特異摂動理論及びパターン形成の数学的基盤に対して貢献するところ大なるものがある。よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。