博士（理学）　山　田　雅　博

学 位 論 文 題 名

Riesz's functions and Carleson inequalities in Bergman spaces

（Bergman 空間における Riesz 関数と Carleson 不等式について）

学位論文内容の要旨

D を複素平面における開単位円板、P を解析的な多項式の全体、H を D 上の解析関数全体とする。また、$0<p,q<\infty$、ν,μ を D 上の有限な Borel 正測度とする。ある定数 $0<C<\infty$ が存在して、全ての $f\in H$ に対して

$$\left(\int_D |f|^q\,d\nu\right)^{1/q}\le C\left(\int_D |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

となるとき、ν と μ は (q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式を満たすと呼ぶことにする。ここで、$L_a^q(\nu), L_a^p(\mu)$ を各々$L^q(\nu)\cap H, L^p(\mu)\cap H$ とし、これらを荷重付 Bergman 空間と呼ぶ。明らかに、上の不等式が成立することは $L_a^p(\mu)$ が $L_a^q(\nu)$ に連続に埋め込まれる事と同値である。本論文において扱っている主要な問題は ν と μ が (q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式を満たすための必要十分条件を見つけることである。

問題の意味を知るため、簡単な考察を与える。$f\in H$ を $f\in L^q(\nu)\cap L^p(\mu)$ に置き換えて上の不等式を考えてみる。まず、$q=p$ のとき、上の不等式が全ての $f\in L^q(\nu)\cap L^p(\mu)$ について成立することは D の任意の Borel 集合 E に対して、$\nu(E)\le C\mu(E)$ が成立することと同値であることが知られている。また、$q>p$ のときは、$\nu(E)\le C\mu(E)^{q/p}$ と同値であることが解る。$q<p$ のときには、ν の μ に関する Radon-Nikodym 導関数を $d\nu/d\mu=w$ とおいたときに、$w\in L^t(\mu)$ と同値になることも解る。ここで、t は $1/t+1/(p/q)=1$ とする。再び、f を $f\in H$ として上の不等式を考えると、例えば $q=p$ のとき、任意の Borel 集合 E に対して、$\nu(E)\le C\mu(E)$ という条件は明らかに強すぎる条件であることが予想される。この考察を参考にして、次のような特殊な Borel 集合だけを考えることにする。$a,z\in D$ に対して、ϕ_a を原点 0 を a に写す D 上の一次変換、また

$$\beta(a,z)=1/2\log(1+|\phi_a(z)|)/(1-|\phi_a(z)|)$$

とする。このとき、$0<r<\infty$ なる r に対して、

$$D_r(a)=\{z\in D\mid \beta(a,z)<r\}$$

とし、これを Bergman disk と呼ぶ。さらに、

$$\hat{\mu}_r(a) = \frac{1}{m(D_r(a))}\int_{D_r(a)} d\mu$$

と定義する。ここで、m は正規化された 2 次元 Lebesgue 測度を表す。

$\alpha > -1$ に対して $dm_\alpha = (1-|z|^2)^\alpha dm$ とする。Oleinik-Pavlov は $\mu = m_\alpha$、$q \geq p$ のとき、(q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式が満たされるための必要十分条件が、ある $r > 0$ が存在して $(1-|a|^2)^{2-(2+\alpha)q/p}\hat{\nu}_r(a)$ が有界となることであるということを示した。$p = q$、かつ $\alpha = 0$ のとき、$\hat{\mu}_r(a) \equiv 1$ であることに注意すると、この条件は $\hat{\nu}_r(a) \leq \gamma\hat{\mu}_r(a) \quad (a \in D)$ と書き換えることができる。ここで、γ は定数を表わすものとする。すなわち、これは上で述べた条件において $E = D_r(a)$ としたものに他ならない。さらに、Luecking は $\nu = m$、$\mu = \chi_G dm$ のときに全ての $f \in P$ に対して Carleson 不等式が満たされるための必要十分条件が上と同様の条件であることを示した。ここで、χ_G は $G \subset D$ の特性関数を表わす。また、Luecking は $\mu = m$、$q < p$ のときに (q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式が満たされるための必要十分条件が、ある $r > 0$ が存在して$\hat{\nu}_r(a) \in L^t(m)$ であることも示した。ここで、t は $1/t + 1/(p/q) = 1$ を満たすものとする。この条件において、もし仮に $q = p$、$t = \infty$ と考えると $\hat{\nu}_r(a)$ が有界という条件が得られることになる。このように特殊な測度に対しては幾つかの結果が知られているが、一般の測度に対してはほとんどわかっておらず、問題は非常に難しいように思われる。

本論文では、まず最初に $q = p = 2$ の場合について、この問題に取り組む。この限定されたケースに関する考察が、後の一般の $0 < q, p < \infty$ の場合における考察を可能にする。これらの考察を行うために、我々は ∂D 上において良く知られた A_p-条件をモデルにし、D 上において (A_p)-条件および $(A_p)_\partial$-条件等、新たな概念を導入する。また、測度の台の分布を表わす量、ε_R, δ_R 等も新たに導入し、それらについて幾つかの例を通して調べる。主定理は、以下の定理 A、B、および C である。次の定理 A は、$q = p = 2$ の場合について部分的に Oleinik-Pavlov の結果を含み、また定理 A を得るために導いた命題 2.1 および命題 2.2 はより深い考察を行っている。

定理 A. $d\mu = w dm, w$ は $(A_2)_\partial$-条件を満足するものとする。このとき、次の (1) ~ (3) は同値である。

(1) ν と μ は $(2,2)$ に関する (ν,μ)-Carleson 不等式を満たす。

(2) ある $0 < r < \infty$ と $0 < \gamma < \infty$ が存在して

$$\hat{\nu}_r(a) \leq \gamma\hat{\mu}_r(a) \qquad (a \in D)$$

である。

(3) 任意の $0 < r < \infty$ に対して、ある $0 < \gamma < \infty$ が存在して

$$\hat{\nu}_r(a) \leq \gamma\hat{\mu}_r(a) \qquad (a \in D)$$

である。

定理 A は、$q = p = 2$ の場合について部分的に Oleinik-Pavlov の結果を含んでいるだけである。しかし、定理 A を導くために使われた手法は、より一般的な $q \geq p$ の場合に対する結果、すなわち次の定理 B にも用いられている。定理 B は Oleinik-Pavlov の結果を完全に含んでいる。

定理 B. $q \geq p$ とする。さらに、$d\mu = w dm_\alpha, w$ はある $1 < s < \infty$ に対して (A_s)-条件を満足し、ある $0 < R < \infty$ が存在して $\varepsilon_R(\mu,\alpha) < 1$ とする。このとき、(q,p) に関して (ν,μ)-Carleson 不等式が満たされる事と、ある $0 < r < \infty$ と $0 < \gamma < \infty$

が存在して $(1-|a|^2)^{2(1-q/p)}\hat{\nu}_r(a)/\hat{\mu}_r(a)^{q/p} \leq \gamma \quad (a \in D)$ なることは同値である。

$q < p$ の場合に対する結果は次の定理 C であり、これは上の Luecking の結果を含んでいる。定理 C を示すためには Amar や Rochberg らが考察している補完点列の概念を用いる。補完点列は定義 4.3 において Riesz 関数を用いて一般的に定義され、補完点列が存在するための十分条件が定理 4.1 および 4.2 によって与えられている。

定理 C. $q < p$ かつ、$d\mu = wdm_\alpha$ とする。
(1) $p \leq 1$ とする。さらに、w はある $1 < s < \infty$ に対して (A_s)-条件を満足し、$\varepsilon_R(\mu,\alpha) \to 0 \quad (R \to \infty)$ とする。このとき、(q,p) に関して (ν,μ)-Carleson 不等式が満たされる事と、ある $0 < r < \infty$ が存在して $\hat{\nu}_r/\hat{\mu}_r \in L^t(\mu)$ なることは同値である。ここで、$1/t + 1/(p/q) = 1$ とする。
(2) $1 < p$ とする。さらに、w は $(A_p(\alpha))_\theta$-条件を満足し、$(1-p)(1+\alpha) < \theta < 0$ なる θ が存在して、$\delta_R(\mu,\alpha,\theta) \to 0 \quad (R \to \infty)$ とする。このとき、(q,p) に関して (ν,μ)-Carleson 不等式が満たされる事と、ある $0 < r < \infty$ が存在して $\hat{\nu}_r/\hat{\mu}_r \in L^t(\mu)$ なることは同値である。ここで、$1/t + 1/(p/q) = 1$ とする。

ここでは、(A_p)-条件、$(A_p(\alpha))_\theta$-条件、$\epsilon_R(\mu,\alpha)$、$\delta_R(\mu,\alpha,\theta)$ 等の定義や意味については述べない。ただ、$(A_p(\alpha))_\theta$-条件が満足されれば (A_p)-条件を満足し、また $\theta = 0$ のときに $\varepsilon_R(\mu,\alpha) \leq 2^{2+\alpha}\delta_R(\mu,\alpha,0)$ となることを注意しておく。補完点列の概念を定義するときに用いられた Riesz 関数はそれ自身非常に興味深い関数である。よって、定理 3.1、定理 3.2 などにおいて詳しく Riesz 関数について調べている。また、Riesz 関数を用いて、多項式近似理論と非常に関連の深い荷重付 Bergman 空間の完備性等についても考察し、定理 3.4 においてそれを特徴付けている。

学位論文審査の要旨

主　査　教　授　中　路　貴　彦
副　査　教　授　井　上　純　治
副　査　教　授　岸　本　晶　孝
副　査　教　授　林　　　実樹廣
副　査　助教授　高　橋　勝　利

学 位 論 文 題 名

Riesz's functions and Carleson inequalities in Bergman spaces

(Bergman 空間における Riesz 関数と Carleson 不等式について)

ν と μ は (q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式を満たすとは、ある定数 $0 < C < \infty$ が存在して、全ての $f \in L^q(\nu) \cap L^p(\mu) \cap H$ に対して

$$\left(\int_D |f|^q \, d\nu\right)^{1/q} \leq C \left(\int_D |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

となるときを言う。 ここで H は単位開円板 D 上の正則関数の全体である。申請者は、(q,p) に関する (ν,μ)-Carleson 不等式が成立する ν と μ はどの様な関係にあるかという問題を研究している。この問題における申請者の動機は正則関数の絶対値に対する興味からきているが、もともとは埋め込み問題である。すなわち、重み付き Bergman 空間 $L^p_a(\mu)$ が重み付き Bergman 空間 $L^q_a(\nu)$ にいつ埋め込まれるかを決定する問題である。$f \in L^q(\nu) \cap L^p(\mu) \cap H$ の代わりに、$f \in L^q(\nu) \cap L^p(\mu)$ について上の不等式が成立するとすると、$q \geq p$　のときには、ν と μ は D の任意の Borel 集合 E に対して、$\nu(E) \leq C\mu(E)$ を満足することと同値であることを示すことはやさしい。$q < p$ のときは、ν の μ に関する Radon-Nikodym 導関数を $d\nu/d\mu = w$ とおいたときに、$w \in L^t(\mu)$ と同値になることも見ることはやさしい。ここで、t は $1/t + t/(p/q) = 1$ とする。$f \in L^q(\nu) \cap L^p(\mu) \cap H$ の場合に、問題は著しく難しく、μ が 2 次元 Lebesgue 測度 m または $dm_\alpha = (1-|z|^2)^\alpha dm$ $(\alpha > -1)$ のときのみ広く研究されてきた。主として、Oleinik-Pavlov と Luecking が精力的に研究した。その結果は $f \in L^q(\nu) \cap L^p(\mu)$ の場合に似ているが、証明は全く異なり難しい。

さて学位論文の審査の詳細を述べることにする。$a, z \in D$ に対して、ϕ_a を原点 0 を a に写す D 上の一次変換、また $\beta(a,z) = \dfrac{1}{2}\log(1 + |\phi_a(z)|)/(1 - |\phi_a(z)|)$ とする。このとき、$0 < r < \infty$ なる r に対して、$D_r(a) = \{z \in D | \beta(a,z) < r\}$ とし、これを Bergman disk と呼ぶ。さらに、$\widehat{\mu_r}(a) = \dfrac{1}{m(D_r(a))}\displaystyle\int_{D_r(a)} d\mu$ と定義する。申請者は次の定理を証明している。

$\boxed{\text{定理}}$ $q \geq p$ とする。さらに、$d\mu = w dm_\alpha, w$ はある $1 < s < \infty$ に対して (A_s)-条件を満足し、ある $0 < R < \infty$ が存在して $\varepsilon_R(\mu, \alpha) < 1$ とする。このとき、(q, p) に関して (ν, μ)-Carleson 不等式が満たされる事と、ある $0 < r < \infty$ と $0 < \gamma < \infty$ が存在して $(1 - |a|^2)^{2(1-q/p)} \widehat{\nu_r}(a) / \widehat{\mu_r}(a)^{q/p} \leq \gamma \ (a \in D)$ となることは同値である。

上の定理は、$d\mu = dm_\alpha$ であるときの Oleinik-Pavlov の結果を含んでいる。アイディアは (A_s)-条件を用いかつ、測度 μ についての量 $\varepsilon_R(\mu)$ を導入したことにある。$q \geq p$ の場合の結果としては、美しい満足されるものである。申請者は、更に $q < p$ の場合を研究して、$d\mu = dm$ であるときの Luecking の結果を含む形の定理を証明している。$p \leq 1$ のときは上の定理で、$\varepsilon_R(\mu, \alpha) < 1$ を $\varepsilon_R(\mu, \alpha) \to 0 \ (R \to \infty)$ でおきかえたときに証明している。証明は困難で、申請者は、Amar や Rochberg らが考察している正則関数の補間問題を、Riesz 関数を用いて、一般的に解くことにより証明している。$1 < p$ のときは更に困難で、強い条件のもとに証明している。しかし多くの具体例を含む。

以上の申請者の研究は、Carleson 不等式についての、最終的な結果を与えたものではないが、この困難な問題への大変興味ある第一歩を与えるもので、博士（理学）の学位を得るにふさわしいものである。