博士（理学） 五十嵐 雅 之

学 位 論 文 題 名

On Compact Kähler - Liouville Surfaces

（コンパクトなケーラー・リウビユ曲面について）

学位論文内容の要旨

古くから完全積分可能な測地流を持つリーマン多様体について研究されてきているが，その1つとして，ヤコビ，リウビユによって研究されたリウビユ型線素の理論がよく知られている．その方面の最近の研究としては，北海道大学の清原一吉氏によるコンパクトリウビユ曲面の理論が挙げられる．それは，リウビユ型線素を大域的微分幾何学として捉えた理論の1つと言える．彼は，コンパクトリウビユ曲面を定義・分類し，さらに，その後，高次元のリウビユ多様体へと概念を拡張した．彼の高次元のリウビユ多様体の研究では，プロパーと呼ばれるある条件を満たすものを主に扱い分類している．

ところで，標準的な n 次元複素射影空間 $\boldsymbol{CP}^n (n \geq 1)$ を考えると，エネルギー関数のみならずそれ以外に $n-1$ 個の測地流の第一積分が存在して，その測地流は完全積分可能となる．また，清原氏の実リウビユ多様体の複素化の研究により，その構造を変形することによって，標準的ではない n 次元複素射影空間上にもリウビユ構造と呼ぶにふさわしい完全積分可能な測地流の構造が構成されるという結果が得られている．これらのことから，コンパクト複素多様体上にどのようにリウビユ構造が定義できるのか，さらに，それがどのような性質を持つのか，ということが問題となってくる．

ここでは，ケーラー計量を持つ複素2次元でコンパクトな複素多様体に対してリウビユ構造を定義し，後に述べるプロパーという条件を満たすものについてその全体構造を調べる．

$(M,g,J,\mathcal{F})$ がコンパクトなケーラー・リウビユ曲面であるとは，(M,g,J) が連結でコンパクトなケーラー曲面，$\mathcal{F}$ が T^*M 上の C^∞-実数値関数からなる2次元ベクトル空間で，以下を満たすときに言う：

(1) $E \in \mathcal{F}$；

(2) 任意の $F \in \mathcal{F}$ と任意の $p \in M$ に対して

$$F_p = F\Big|_{T_p^*M} : T_p^*M \to \boldsymbol{R}$$

が2次の斉次多項式となっている；

(3) 任意の $F \in \mathcal{F}$ はエルミート，i.e. $F \circ J = F$，である；

(4) 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\{E,F\} = 0$ である．

ここで，E はリーマン計量 g に関する T^*M 上のエネルギー関数，$\{\, , \,\}$ は T^*M 上の自然なポアソンブラケットである．

$\mathcal{F}_p=\{F_p|F\in\mathcal{F}\}$ とおく．$\dim\mathcal{F}_p=1$ を満たす M 内の点 p を，ケラー・リウビユ構造 $\mathcal{F}$ に関する特異点と言い，そういう点の集合を M_{sing} で表す．

コンパクトなケラー・リウビユ曲面 $(M,g,J,\mathcal{F})$ がプロパーであるとは，$M_{sing}\neq\emptyset$ であって，さらに任意の $p\in M_{sing}$ と，$F_p=0$ を満たす任意の $F\in\mathcal{F}\setminus\{0\}$ に対して，ある $\omega\in T_p^*M$ があって，$(dF)_\omega\neq 0$ が成り立つときに言う．

このプロパーなケラー・リウビユ構造は，標準的な複素射影平面上に自然に構築されるリウビユ構造をモデルとしたあるタイプのケラー・リウビユ構造であると言える．

ではここで，プロパーでコンパクトなケラー・リウビユ曲面について得られた結果を述べる。

$(M,g,J,\mathcal{F})$ をプロパーでコンパクトなケーラー・リウビユ曲面とする．すると，次が成り立つ：

(1) (M,g) の測地流は，完全積分可能である；

(2) (M,J) は，複素射影平面$\boldsymbol{CP}^2$ に正則同型である；

(3) ある特別な $F\in\mathcal{F}$ が存在し，それと同時に，(M,g,J) 内に3点 q_0，q_1，q_2 と3つの全測地的で複素射影直線$\boldsymbol{CP}^1$ に正則同型な複素部分多様体 H_0，H_1，H_2 が存在して，次が成り立つ，

  (i) $H_1\cap H_2=\{q_0\}$，$H_0\cap H_1=\{q_2\}$，$H_2\cap H_0=\{q_1\}$；

  (ii) H_0 は F が半定値となる M 内の点の集合となっている；

  (iii) $H_0\cup H_1\cup H_2$ は F がある意味で臨界となっている M の点の集合である；

  (iv) H_0，H_1，H_2 内にそれぞれ測地的極座標が入り，それぞれ q_1と q_2，q_0と q_2，q_0 と q_1 が極となる；

(4) M_{sing} は円周 S^1 と微分同型な H_0 の部分多様体になっている；

(5) M への2次元トーラス $S^1\times S^1$ の効果的な作用 ζ で次を満たすものが自然に定義できる：

  (i) ζ は $(M,g,J,\mathcal{F})$ の自己同型から成る作用である；

  (ii) 作用 ζ で3点 q_0，q_1，q_2 は不動である；

  (iii) 作用 ζ は3つの複素部分多様体 H_0，H_1，H_2 を保存する；

(6) M 内の全測地的で実射影平面$\boldsymbol{RP}^2$ に微分同型な実2次元コンパクト部分多様体（閉曲面）の族 $\mathcal{S}$ があって次を満たす；

  (i) $\mathcal{S}$ に属する各閉曲面には $\mathcal{F}$ より導入される構造によって実リウビユ曲面となる；

  (ii) (5) の作用 ζ より，2次元トーラス $S^1\times S^1$ の推移的な $\mathcal{S}$ への作用が自然に導かれる，すなわち，$\mathcal{S}$ に属する各閉曲面は ζ によってお互いに移り合う．

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　山　口　佳　三
副　査　　教　授　　諏　訪　立　雄
副　査　　教　授　　中　村　　　郁
副　査　　助教授　　清　原　一　吉

学位論文題名

On Compact Kähler - Liouville Surfaces

（コンパクトなケーラー・リウビユ曲面について）

古くから完全積分可能な測地流を持つリーマン多様体について研究されてきているが，その1つとして，ヤコビ，リウビルによって研究されたリウビル型線素の理論がよく知られている。リーマン多様体ないし，リーマン計量を，その測地流が完全積分可能であるという性質によって，大局的に調べようという研究は，ごく最近のものである。この方面の研究としては，北海道大学の清原一吉氏によるコンパクトリウビル曲面の理論が挙げられる。それは，リウビル型線素を大域的微分幾何学として捉えた理論の1つと言える。彼は，コンパクトリウビル曲面を定義・分類し，さらに，その後，高次元のリウビル多様体へと概念を拡張した。

ところで，標準的な n 次元複素射影空間 $CP^n(n \geq 1)$ を考えると，エネルギー関数のみならずそれ以外に $n-1$ 個の測地流の第一積分が存在して，その測地流は完全積分可能となる。また，清原氏の実リウビル多様体の複素化の研究により，その構造を変形することによって，標準的ではない n 次元複素射影空間上にもリウビル構造と呼ぶにふさわしい完全積分可能な測地流の構造が構成されるという結果が得られている。これらのことから，コンパクト複素多様体上にどのようにリウビル構造が定義できるのか，さらに，それがどのような性質を持つのか，ということが問題となってくる。

申請者は，複素2次元でケーラー計量を持つ複素多様体に対してリウビル構造を定義し，プロパーという条件を満たすものについてその全体構造を決定した。

$(M,g,J,\mathcal{F})$ がコンパクトなケーラー・リウビル曲面であるとは，(M,g,J) が連結でコンパクトなケーラー曲面であって，$\mathcal{F}$ が T^*M 上の C^∞-実数値関数からなる2次元ベクトル空間で，つぎを満たすときに言う：$\mathcal{F}$ は，リーマン計量 g に関する T^*M 上のエネルギー関数 E を含み，E と包合的（$\{E,F\}=0$）かつ，エルミートな（$F\circ J=F$），T^*Mの各繊維上2次斉次多項式となる関数 F で生成される。

$(M,g,J,\mathcal{F})$ をプロパーでコンパクトなケーラー・リウビル曲面とする。これに対して申請者が得た構造定理はつぎのとうりである：

(1) (M,g) の測地流は，完全積分可能である；

(2) (M,J) は，複素射影平面 CP^2 に正則同型である；

(3) ある特別な $F \in \mathcal{F}$ が存在し，それと同時に，(M,g,J) 内に3点 q_0，q_1，q_2 と3つの全測地的で複素射影直線 CP^1 に正則同型な複素部分多様体 H_0，H_1，H_2 が存在して，次が成り立つ，

(i) $H_1 \cap H_2 = \{q_0\}$，$H_0 \cap H_1 = \{q_2\}$，$H_2 \cap H_0 = \{q_1\}$；

(ii) H_0 は F が半定値となる M 内の点の集合となっている；

(iii) $H_0 \cup H_1 \cup H_2$ は F がある意味で臨界となっている M の点の集合である；

(iv) H_0，H_1，H_2 内にそれぞれ測地的極座標が入り，それぞれ q_1 と q_2，q_0 と q_1，q_0 と q_2 が極となる；

(4) $\mathcal{F}$ の特異点集合 M_{sing} は円周 S^1 と微分同型な H_0 の部分多様体になっている；

(5) M への2次元トーラス $S^1 \times S^1$ の効果的な作用 ζ で次を満たすものが自然に定義できる：

(i) ζ は $(M,g,J,\mathcal{F})$ の自己同型から成る作用である；

(ii) 作用 ζ で3点 q_0，q_1，q_2 は不動である；

(iii) 作用 ζ は3つの複素部分多様体 H_0，H_1，H_2 を保存する；

(6) M 内の全測地的で実射影平面 RP^2 に微分同型な実2次元コンパクト部分多様体（閉曲面）の族 $\mathcal{S}$ があって次を満たす；

(i) $\mathcal{S}$ に属する各閉曲面には $\mathcal{F}$ より導入される構造によって実リウビユ曲面となる；

(ii) (5) の作用 ζ より，2次元トーラス $S^1 \times S^1$ の推移的な $\mathcal{S}$ への作用が自然に導かれる，すなわち，$\mathcal{S}$ に属する各閉曲面は ζ によってお互いに移り合う．

この学位論文は既に，Journal of Mathematical Society of Japan に投稿され掲載が決定している。審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。