

学 位 論 文 題 名

SHADOWS OF MOVING SURFACE

(動く曲面の影)

学位論文内容の要旨

本論文では、3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内で、ある方向から光が、動く曲面にあたっているとき、その光の方向と直交する平面（壁）の上に映る曲面の影の局所的な形状について研究した。

曲面の影を研究する一つの動機として映像理論における曲面の再現問題がある。映像理論においては、3次元空間内の実際の物体を3次元座標空間内にいかに数学的に再現出来るかが一つの重要な問題である。今、曲面（物体）に、ある方向から光があたっているとすると、その曲面上の各点では照度 I という値が定まる。このとき、反射度と呼ばれる量 $R(n)$ との間には Horn image irradiance 方程式 $R(n) = I(y_1, y_2)$ が定まることが知られている。この方程式は曲面が $x = u(y_1, y_2)$ という関数のグラフとしてかかれているとき偏微分方程式となり、P.L.Lions, E.Roy and A.Tourin はこの偏微分方程式に対する境界値問題を設定して、粘性解理論を適用することにより、曲面の再現問題を研究した。このとき、境界としては曲面の影のふちが対応しているが、彼らの設定した境界の形状は非常に単純なものであり、従って、一般に曲面の影の形状の分類を行うことが今後の研究の為に必要となる。

固定された曲面の影の局所的な形状は、すでに、O.A.Platonova 及び渡辺一夫によって分類されている。しかし、曲面が動いている時、その影の形状は、はるかに複雑になることは容易に想像できる。本論文では、曲面が一径数に依存して動くときの、影の局所的な形状の分岐の分類を行った。この研究は上記のような動機のほかに、写像の特異点論の立場からも非常に興味深いものと思われ、また、我々が地上を歩いているとき、日の光によって映し出される影はどのように変化するかと言う素朴な日常的疑問に答えるものでもある。

曲面の影とは、数学的には、 H を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたコンパクト2次元多様体（閉曲面）として、ある座標軸に平行な射影 $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (\pi(x, y_1, y_2) = (y_1, y_2))$ による像 $\pi(H)$ のことである。ここでは、この曲面が一径数に依存して動く場合を考える。この場合は、以下のように取り扱われる。 $\text{Emb}(H, \mathbb{R}^3)$ を H から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み全体のなす集合とする。このとき、Whitney- C^∞ -位相を考えるとこの集合は Borel 空間となる。さらに、次の集合を考える：

$$\mathcal{P} := \{e: H \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} | e(p, t) = (i_t(p), t), i_t \in \text{Emb}(H, \mathbb{R}^3)\}$$

ここで、 I は 0 を含むある开区間とする。この空間 $\mathcal{P}$ の元 e が3次元空間内の動く曲面（一径数に沿って動く曲面）である。この場合、その影は、動く曲面の影の族を一固まりとして3次元空間 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のなかで考え、射影 $\Pi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \Pi(x, y_1, y_2, t) = (y_1, y_2, t)$

と e との合成の像 $\Pi \circ e(H \times I)$ のこととする。即ち、実際に目に見える影は、各 $t \in I$ を固定した切り口 $D_t = \Pi \circ e(H \times \{t\})$ である。本論文では、この様に定義した影の径数 t に沿った分岐の局所微分同相による分類をあたえた。ここで、分類の為の同値関係は以下の様に定義される： $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$ の部分集合芽 $(D, 0)$ と $(D', 0)$ が t -微分同相であるとはある微分同相芽 $\Phi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$ で $\Phi(y_1, y_2, t) = (\phi_1(y_1, y_2, t), \phi_2(t))$ の形をしたものが存在して、集合芽として $\Phi(D) = D'$ を満たすこととする。この同値関係により、すべての $t \in I$ に対する $D \cap \mathbb{R}^2 \times \{t\}$ は $D' \cap \mathbb{R}^2 \times \{\phi_2(t)\}$ に一斉に微分同相となり、 D 及び D' の一径数 t に依存した分岐の形状は同じものと見なすことが出来る。さらに、 $\mathcal{P}$ の元 e に対するある性質 $\mathbf{P}$ が「典型的」な e について成立するとは、ある稠密な部分集合 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ が存在して $\mathcal{Q}$ に属する任意の元 e が性質 $\mathbf{P}$ を持つこととする。即ち、ある性質が「典型的」とはすべての元がその性質を持つとは限らないが、どんな元もその性質を持つような元で近似出来ることを意味している。この様な概念を考えることにより、実際の現象には現れない病的な部分を除外することが出来る。

本論文では以下の結果を得た。

定理. 「典型的」な $e \in \mathcal{P}$ とその影 $\Pi \circ e(H \times I)$ 上の任意の点 p_0 に対して 影の集合芽 $(\Pi \circ e(H \times I), p_0)$ は以下の原点における集合芽のどれかと t -微分同相となる：

$$\begin{aligned} & \{(x, y_1, y_2, t) | x = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^3 + xy_2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^3 + tx + xy_2^2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^3 + tx - xy_2^2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^4 + tx^2 + xy_2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_2 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t + y_2^2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t - y_2^2 - y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^3 + tx + xy_2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_2 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^3 + tx - xy_2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_2 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t + y_2 = 0, \text{又は } x^3 + xy_2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t - y_2 = 0, \text{又は } x^3 + xy_2 + y_1 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t + y_2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_2 = 0\} \\ & \{(x, y_1, y_2, t) | x^2 + t - y_2 - y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_1 = 0, \text{又は } x^2 + y_2 = 0\} \end{aligned}$$

分類を実行するに当たっての主要な道筋は、(1) 部分多様体の局所方程式の分類、(2) 多重局所方程式の分類、(3) Thom の多重横断性定理の適用 の3つの部分からなる。

3次元部分多様体 $e(H \times I)$ 上の点 (p_0, t_0) に対して、その近傍 U と沈め込み芽 $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $U \cap e(H \times I) = F^{-1}(0)$ が成立することが知られているが、この F を $e(H \times I)$ の点 (p_0, t_0) に於ける局所方程式と呼ぶ。本論文では、影の分類に於ける t -微分同相の概念を局所方程式の間の対応する同値関係に翻訳し、関数の分類理論を適用することにより標準形の一部を求めた。また、影の点は、曲面上の複数個の点からの射影の像になっている場合もあるので、その場合に対応して、多重局所方程式を考え、やはり関数の分類理論を適用することにより、より一般の標準形も求めた。さらに、Thom の多重横断性定理を適用するために、これら関数の標準形と考えている写像 e とが厳密に対応していることを示し、ベクトル場の作る加群の代数的な性質を詳しく調べ、さらに(多重)局所方程式の分類に対応する写像の同値類を決定した。最後に、Thom の多重横断性定理をこの写像の分類結果に適用することにより、その標準形を持つことが e にとって「典型的」であることを示した。これらの方法は個別には滑らかな写像の特異点論に於いて、標準的な手法であると言えるが、従来これらは別々の目的のために開発研究されてきた

手法である。本論文ではそれらを有機的に統合し それぞれを改良することにより、動く曲面の影の分類に適用することが出来た。この過程において、従来の、Platonova や渡辺一夫の研究とは本質的に異なる考察 が必要であった。

以上。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一

副 査 教 授 山 口 佳 三

副 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 助 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

SHADOWS OF MOVING SURFACE

(動く曲面の影)

本論文では、3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内で、ある方向から光が、動く曲面にあたっているとき、その光の方向と直交する平面(壁)の上に映る曲面の影の局所的な形状について研究している。

曲面の影を研究する一つの動機として映像理論における曲面の再現問題がある。映像理論においては、3次元空間内の実際の物体を3次元座標空間内にいかに数学的に再現出来るかが一つの重要な問題である。今、曲面(物体)に、ある方向から光があたっているとすると、その曲面上の各点では照度 I という値が定まる。このとき、反射度と呼ばれる量 $R(n)$ との間には Horn image irradiance 方程式 $R(n) = I(y_1, y_2)$ が定まることが知られている。この方程式は曲面が $x = u(y_1, y_2)$ という関数のグラフとしてかかれているとき偏微分方程式となり、P.L.Lions, E.Roy and A.Tourin はこの偏微分方程式に対する境界値問題を設定して、粘性解理論を適用することにより、曲面の再現問題を研究した。ここで、彼らの設定した境界の形状は非常に単純なものであり、従って、一般に曲面の影の形状の分類を行うことが今後の研究の為に必要となる。

固定された曲面の影の局所的な形状は、すでに、O.A.Platonova 及び渡辺一夫によって分類されている。しかし、曲面が動いている時、その影の形状は、はるかに複雑になることは容易に想像できる。本論文では、曲面が一径数に依存して動くときの、影の局所的な形状の分岐の分類を行っている。この研究は上記のような動機のほかに、写像の特異点論の立場からも非常に興味深いものと思われ、また、我々が地上を歩いているとき、日の光によって映し出される影はどのように変化するかと言う素朴な日常的疑問に答えるものでもある。

曲面の影とは、数学的には、 H を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたコンパクト 2次元多様体(閉曲面)として、ある座標軸に平行な射影 $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 (\pi(x, y_1, y_2) = (y_1, y_2))$ による像 $\pi(H)$ のことである。ここでは、この曲面が一径数に依存して動く場合を考える。この場合は、以下のように取り扱われる。 $\text{Emb}(H, \mathbb{R}^3)$ を H から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み全体のなす集合とする。このとき、Whitney- C^∞ -位相を考えるとこの集合は Borel 空間となる。さらに、次の集合を考える：

$$\mathcal{P} := \{e: H \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} | e(p, t)(i_t(p), t), i_t \in \text{Emb}(H, \mathbb{R}^3)\}$$

ここで、 I は 0 を含むある開区間とする。この空間 $\mathcal{P}$ の元 e が 3次元空間内の動く曲面(一径数に沿って動く曲面)である。この場合、その影は、動く曲面の影の族を一固まりとして 3次元空間 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のなかで考え、射影 $\Pi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \Pi(x, y_1, y_2, t) = (y_1, y_2, t)$ と e との合成の像 $\Pi \circ e(H \times I)$ のこととする。即ち、実際に目に見える影は、各 $t \in I$ を固定した切り口 $D_t = \Pi \circ e(H \times \{t\})$ である。本論文では、この様に定義した影の径数 t に沿った分岐の局所微分同相による分類について研究している。ここで、分類の為の同値関係は以下の様に定義される： $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$ の部分集合芽 $(D, 0)$ と $(D', 0)$ が t -微分同相であるとはある微分同相芽 $\Phi: (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$ で $\Phi(y_1, y_2, t) = (\phi_1(y_1, y_2, t), \phi_2(t))$ の形をしたものが存在して、集合芽として $\Phi(D) = D'$ を満たすこととする。この同値関係により、すべての $t \in I$

に対する $D \cap \mathbb{R}^2 \times \{t\}$ は $D' \cap \mathbb{R}^2 \times \{\phi_2(t)\}$ に一斉に微分同相となり、 D 及び D' の一径数 t に依存した分岐の形状は同じものと見なすことが出来る。さらに、 $\mathcal{P}$ の元 e に対するある性質 P が「典型的」とは、すべての元 e がその性質 P を持つとは限らないが、どんな元もその性質 P を持つような元で近似出来ることとする。このような概念を考えることにより、実際の現象には現れない病的な部分を除外することが出来る。

本論文では、「典型的」な $e \in \mathcal{P}$ に対して、その影の上の任意の点のまわりの影の芽を前記の同値関係で分類を行い、その結果、全部で九つの標準形を得ている。

分類の主要な道筋は、(1) 部分多様体の局所方程式の分類、(2) 多重局所方程式の分類、(3) Thom の多重横断性定理の適用の3つの部分からなる。これらの方法は個別には滑らかな写像の特異点論に於いて、標準的な手法であると言えるが、従来これらは別々の目的のために開発研究されてきた手法である。本論文ではそれらを有機的に統合しそれぞれを改良することにより、動く曲面の影の分類に適用している。この過程において、従来の、Platonova や渡辺一夫の研究とは本質的に異なる考察が必要であった。

これを要するに、著者は滑らかな写像の特異点論の応用として動く曲面の影の分類理論に関して新知見を得たものであり、微分トポロジー (特異点論) 及び映像理論に貢献すること大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める。