

学 位 論 文 題 名

On the Mechanism of Spatial Bifurcations in the Open Flow System

(Open flow system における空間方向分岐現象の生成機構)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

複数の力学系を結合した結合写像系 (Coupled Map) の研究が、近年盛んに行われている。ここで、個々の力学系の性質と結合写像系全体の性質とがどのように関係するのが、興味の一つとなる。このような結合写像系のひとつである Open Flow System(OFS) は、一方向に同一の一次元離散力学系 (要素力学系) が鎖状に結合された系であり、「流体」のモデルとして金子によって導入された。OFS において、層流や乱流に似た振舞いが計算機実験によって観察されており、時間方向、空間方向における OFS の振舞いがカオスや間欠性と関連付けられ研究されている。ここで空間方向とは、要素力学系の結合の方向である。その中で OFS に特徴的な振舞いとして空間方向分岐現象が知られている。これは、結合された個々の要素力学系の運動周期が空間方向に一周期、二周期、四周期、八周期、... と倍化していく現象であり、この周期倍化の過程において個々の力学系が固有に持つ周期軌道への収束、倍周期への分岐が観察される。これまで、この空間方向分岐現象は、OFS における定常解の空間方向の対流不安定性などの概念で説明されてきたが、その具体的な生成機構は解っていなかった。ここで問題となるのは、安定な定常解が解析的に示され、空間方向に一旦は、その定常解に収束するにもかかわらず、その定常解が空間方向に不安定化し周期倍分岐が起きることであった。

本論では、計算機による力学系の有限精度近似の立場から OFS を解析し、空間方向分岐の生成機構、および分岐が生じる条件を得た。OFS の定常解は、周期解位置の空間方向写像によって求めることができ、その解析により、要素力学系固有の n 周期解へ空間方向に収束する n 周期解の系列が定常解となる条件 (収束条件)、そしてこの定常解が安定となる条件 (安定条件) が得られる。この周期 n の定常解は、安定であるにもかかわらず、 $2n$ 周期へ分岐する場合がある。有限精度で近似された OFS では系の状態は離散化して表現されるため周期 n の安定解の近傍に $2n$ 周期の擬周期解が存在する場合があり、この擬周期軌道は倍周期の微少強制外力として OFS に作用する。この微少強制外力のもとでの周期解位置の空間方向写像の解析により OFS が、この周期解位置の微少なずれ (倍周期) を空間方向に増幅する作用を持つ条件 (拡大条件) が得られる。これらの条件は、要素力学系固有の周期解に課せられるものであり、空間方向に周期軌道の位置が、要素力学系の n 周期解 x^* に収束し、 $2n$ 周期へ分岐するためには、 x^* が収束条件、安定条件、拡大条件を満たす必要がある。このため、一周期、二周期、四周期と、逐次的に各周期解への収束、および倍周期への分岐が生じるためにはそれぞれの周期においてこの必要条件が満たされなければならない。これらの結果は、Logistic 写像を f とした OFS において検証され、本論における解析結果は、計算機実験における空間方向分岐とよく一致する。

以上、本論において OFS における空間方向分岐の生成機構を解明した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 津 田 一 郎
副 査 教 授 辻 下 徹
副 査 教 授 西 浦 廉 政
副 査 助 教 授 松 本 健 司

学 位 論 文 題 名

On the Mechanism of Spatial Bifurcations in the Open Flow System

(Open flow system における空間方向分岐現象の生成機構)

本論文はカオス結合系の中でも特に一方向性の結合をもつ open flow system の空間方向での分岐を扱っている。カオス結合系とはカオス力学系が多数結合した系であり、高次元のカオス力学系を研究するための有用な数理モデルであるとして広く認識されている。さらには、カオス力学系として離散力学系を選び、問題に応じて結合の仕方を変えることで、流体乱流などの高次元の乱雑運動を簡便にシミュレートすることができるので、自由度の高い系の研究の構成論的な道具立てともみなされている。特に後者においては、ナビエ Stokes 方程式のような既存の現象論的方程式とは論理的に独立であるはずのカオス結合系が、流体乱流に類似の現象を計算機内で生成することは、自然現象の理解一般に大きな反省をもたらしている。

十年程前に open flow system において、空間方向への周期倍分岐が計算機実験によって見いだされた。しかし、空間方向は力学系のパラメーターではないので、これを力学系の分岐現象とみなすことはできない。いくつかの解析が試みられたが、いずれも現象の本質からは遠く、不完全なものであり、真の理解が待たれていた。

申請者は、この現象が計算機の演算の過程で微視的なレベルに生成される力学系によって引き起こされたものであることを、各周期解近傍の線形解析と二進表現による計算機実験によって示すことでその機構を解明した。申請者は計算機実験の分岐の様子を詳しく分析し、open flow system の計算機実験においては一般的に、不動点が安定であるべき力学要素に固有の不動点の近傍に計算機の演算によってすでに擬の二周期軌道が生成されていることを発見した。この発見は二つの過程によってなされた。まず、二進表現による計算機実験により事実として擬軌道が存在することを確認したこと。次に、無限精度の解析においては不動点へと収束する安定多様体のみが存在するが、有限精度の解析ではその不動点がサドルになり不安定多様体が生成されることを解析的に求めたことである。さらに、一般の n 周期軌道の近傍での線形解析を行なうことで、真の n 周期軌道への収束、擬の $2n$ 周期軌道への分離がどのようにして起りうるかを調べ、空間分岐の三条件を導出し

た。三条件とは、各周期解の線形安定性条件、各周期解の空間方向への収束条件、 n 周期が $2n$ 周期へと不安定化するための発散条件である。

さらに申請者は、この三条件が空間分岐のための必要条件であることを確認するために、精密な計算機実験を行なった。要素力学系の非線形パラメーターと結合強度とで張られる2次元パラメーター空間の250、000点のそれぞれにおいて計算機実験を行ない空間分岐の最大周期を求め、これと理論的な条件から求めた最大周期とを比較し、前者が後者より全ての点で等しいか小さいことを確認した。

本研究はここ十年来懸案であった高次元力学系の重要な問題の一つを解決しただけでなく、計算機による演算を力学系とみなすことを正当化したものとしても高く評価できる。従来、計算機実験においては丸め誤差を小さくすることで近似がなりたつ、と考えられてきたが、申請者の研究により、無限小の誤差でさえ、力学系の位相的構造を変化させる、すなわち計算を行なうこと自体が新たな力学系を追加することであるという点が明確になったのである。いいかえれば、構造安定である力学系が計算機実験によって構造不安定になる機構が明確になったといえる。また、計算の微視的な過程が数理的に抽出されているので、生命現象の微視的過程と巨視的過程の相互作用を議論する手がかりをも与えていると考えることができる。

以上のように、本申請論文は、open flow system において、計算機実験によって見いだされている空間分岐現象が計算機の演算の過程で微視的なレベルに生成される力学系によって引き起こされたものであることを詳細に解析し、空間分岐の条件を求めたものであり、最近十年の未解決問題を解決し、計算機科学と力学系の両分野を関連付けた点で、応用数学に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める。