

Möbius invariant classess and spaces of functions on the unit disc

(単位円板上のモービウス不変な関数族と関数空間)

学位論文内容の要旨

本論文の主要なテーマは、単位開円板 D 上の正規有理型関数, Bloch 関数, および D の自己解析写像に関する研究であり, 特に, 値分布論および合成作用素についてのいくつかの新しい結果を与えている. 扱う関数族はすべて Möbius 変換に関して不変な関数族であり, これらの関数族は, 球面導関数, (通常の) 導関数, 双曲導関数の増大度により特徴付けられる. 正規 (normal) 関数および Bloch 関数については正規族の手法が適用できる. 単位開円板の自己解析写像については, Bloch 空間 B から Besov 空間や VMOA 空間へのコンパクト合成写像を誘導するような写像の特徴付けについての結果を与える.

有理型関数の正規族の概念は今世紀のはじめの P. Montel の論文に登場し, その後の複素関数論の発展において, 中心的役割を果たした.

正規族の概念を用いて, K. Noshiro (1938) は単位開円板上の有理型関数 f で, $\{f(\frac{a-z}{1-\bar{a}z})\}_{a \in D}$ が正規族となるような関数 f の族を導入した. このような有理型関数 f は, 現在, 正規関数と呼ばれる. 正規関数全体の集まりを $\mathcal{N}$ で表すことにする.

正規関数の解析関数版が, Bloch 関数と考えられる. Bloch 関数全体は Banach 空間をなすが, 正規関数族 $\mathcal{N}$ はそうではない. 実際, P. Lappan は和 $f+g$ 及び積 gf が正規関数とならないような正規関数の例 f, g を与えている.

Schwarz-Pick の補題の直接の帰結であるが, 正規関数の双曲型アナロジーが単位開円板の自己解析関数と解釈できる.

本論文全体を通して, 正規族および解析的正規族の考えを各所で用いる. 有理型関数の正規族については球面距離で収束を考える. この手法は A. Ostrowski により始められた. 解析関数の解析的正規族についてはユークリッドの距離で収束を考える.

第2章では, 単位開円板上の有理型関数の正規族 $\mathcal{F} = \{f\}$ について調べる. ここでは, 正規族であるための特徴付けを $\left| \frac{f(z)-f(a)}{1+\overline{f(z)}f(a)} \right|^p$ ($p \geq 1$) の面積積分および線積分を用いて与える (Theorem 2.8).

第3章では, これを正規関数に応用する. また, 有理型関数が正規であることの特徴付けを Möbius 変換を用いた Nevanlinna タイプの特性関数 $T_p(r, f)$ ($0 < p \leq 1$) を使って与える. これは, R. Aulaskari と P. Lappan が $p > 1$ の場合に与えた結果の一般化である. さらに, 小正規 (little normal) 関数を擬 p -点列の言葉で特徴付ける.

第4章では、解析関数の族が解析的正規族となるための特徴付けを、 $|f'(z)|^p$ および $|f(z) - f(a)|^p$ ($a \in D, p > 0$) の面積積分や線積分を用いて与える。これを Bloch 関数に適用する。単位開円板上の解析関数の族 $\{f\}$ が解析的正規族とは、任意の部分関数列 $\{f_n - f_n(0)\}$ がある解析関数に収束する部分列をもつことで定義される。解析的正規族の概念は1970年に Ch. Pommerenke により導入され、Bloch 関数を考える上で基礎になるものである。さらに Gauthier-Gavrilov の ρ -点列の考えを、Bloch 関数に拡張して ρ_B -点列の定義を与える。これにより、Bloch 関数であるための必要十分条件は ρ_B -点列を持たない関数であることを示す。

第5章では、単位開円板の自己解析写像 φ について論じている。まず、 φ に対して、双曲近接関数 $m_*(r, \varphi, a)$ および双曲特性関数 $T_*(r, \varphi)$ を定義して、値分布理論の第1主定理の双曲的一般化

$$m_*(r, \varphi, a) - N(r, \varphi, a) = T_*(r, \varphi), \text{ for any } a \in D$$

を示す(ただし、 $N(r, \varphi, a)$ は通常の数関数)。また、Besov 関数空間 B_p の一般化として、双曲型 Besov 族 B_p^h , $1 < p < \infty$ が定義されるが、 $\varphi \in B_p^h$ がつぎの条件と同値であることを示す (Theorem 5.8):

$$\iint_D \iint_D \frac{\sigma(\varphi(z), \varphi(w))^p}{|1 - z\bar{w}|^4} dA(z) dA(w) < \infty.$$

また、双曲型 VMOA 関数族を

$$VMOA_* = \{\varphi : \lim_{|a| \rightarrow 1} \int_{\Gamma} \sigma(\varphi(z), \varphi(a)) |dz| = 0\}$$

により定義し、双曲型特性関数 $T_*(r, \varphi)$ を用いた特徴付けおよびコンパクト Carleson 測度を用いた特徴付けを与える。

第6章では、Bloch 空間 $\mathcal{B}$ 上の合成作用素 $C_\varphi f = f \circ \varphi$ について調べ、 $C_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow B_p$ がコンパクト作用素となるための必要十分条件が $\varphi \in B_p^h$ であること、および、 $C_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow VMOA$ がコンパクト作用素となるための必要十分条件が $\varphi \in VMOA_*$ であることを示す。最後に、正規関数と双曲型 Besov 関数との合成関数が球面 Besov 関数になることを示す。これらの関数族自体は R. Aulaskari と G. Csordas により導入されている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 林 実樹廣
副 査 教 授 岸 本 晶 孝
副 査 教 授 中 路 貴 彦
副 査 教 授 井 上 純 治

学 位 論 文 題 名

Möbius invariant classess and spaces of functions on the unit disc

(単位円板上のモービウス不変な関数族と関数空間)

複素平面内の単位開円板は最も単純な複素領域でありながら、その上の函数論は今なお研究者を引きつける非常に深い側面をもっている。また、それらの研究は、より一般の領域の研究の指針を与える外延性を持ちながら、それ自体リーマン面の不変被覆面としての一般性も内包しているため、様々な研究者から興味を持たれている領域でもある。

申請者は、単位開円板 D 上の正規有理型関数、Bloch 関数、および D の自己解析写像に関して、値分布論および合成作用素について考察し、新しい結果を与えている。本論文では本研究科在学中に得られたこれら結果について体系的にまとめている。

単位開円板上には、自己等角写像として Möbius 変換が働いている。本論文で扱われている関数族はすべてこの Möbius 変換に関して不変な関数族である。また、単位開円板上には Möbius 変換不変な双曲距離、双曲 (実 2 次元ルベーク) 測度が自然に導入される。一方、その上の関数族については、その値域により、有理型関数なら球面距離に基づいた球面導関数、正則関数なら (通常の) 導関数、さらに、単位開円板に値をとる正則関数には双曲導関数を考え、これら導関数の増大度により様々な関数族が定義される。

申請者は、単位開円板上の正規族の特徴付けをこれら距離 (計量) を用いて統一的に与え (Theorem 2.8, 4.6)、それらを normal (正規) 関数、及び、Bloch 関数の特徴付けに応用している (Theorem 3.2, 4.10)。

また、有理型関数の値分布論における Gauthier-Gavrilov の ρ -点列の類似として、Bloch 関数に関する ρ_B -点列の概念を導入し、Bloch 関数の新しい特徴付けを与えている (Theorem 4.16)。

さらに、Nevanlinna の第一主定理の類似にあたる結果を、単位開円板上の自己正則写像に関して与えている (Theorem 5.2)。これは山下慎二氏の研究を補完するもので、双曲的近接関数の定義を工夫することで第一主定理を剰余項のない等式の形で示している。

つぎに、合成作用素についてもいくつかの結果を与えている。単位開円板上の自己正則写像は、単位開円板上の関数 f に合成写像 $f \circ \varphi$ を対

応させることで、関数族 $\{f\}$ から関数族 $\{f \circ \varphi\}$ への線形作用素を定義する。これを φ から導入される合成作用素という。この合成作用素が、決められた関数族から別の関数族への有界作用素あるはコンパクト作用素となるための条件を自己正則写像 φ の言葉で与える研究が様々な関数族にたいして行われている。

申請者は、Bloch 関数族から正則 Besov 関数族への合成作用素について調べ、この合成作用素がコンパクトになるための必要十分条件を自己正則写像 φ が双曲的 Besov 関数になることにより特徴付けている (Theorem 6.1)。さらに、双曲的 Besov 関数族に関して 2 重積分を用いた特徴付けを与えている (Theorem 5.8)。これは Besov 関数空間についての類似の特徴付けの一般化であるが、双曲的 Besov 関数族は和やスカラ一倍に関して閉じていないことから自明な一般化ではない。

また、Bloch 関数族から $VMOA$ 関数族への合成作用素についても調べ、これを自己正則写像 φ が双曲的 $VMOA$ 関数になることにより特徴付けている (Theorem 6.3, 6.4)。

以上の結果は、現在活発な研究が行われてる分野において注目に値する顕著な成果を与えるものである。よって審査員一同は、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。