

学 位 論 文 題 名

On a denominator of a certain formal power series attached to local densities

(局所密度に付随する形式的べき級数の分母について)

学位論文内容の要旨

本論文の目的は局所密度に付随するいくつかの形式的べき級数の有理性を証明し、それらの分母を求めることである。

局所密度 $\alpha_p(B, A)$ は次のように定義される。

$$\alpha_p(B, A) = \lim_{e \rightarrow \infty} p^{-et} \# \{ \bar{X} \in M_{mn}(\mathbb{Z}_p) / p^e M_{mn}(\mathbb{Z}_p) \mid A[X] \equiv B \pmod{p^e} \}.$$

ここで、 p は素数、 A, B はそれぞれ成分を p 進整数環にもつ m, n 次 ($m \geq n$) の非退化対称行列、 $t = mn - n(n+1)/2$, $M_{mn}(\mathbb{Z}_p)$ は $\mathbb{Z}_p$ 成分の m 行 n 列行列環、 $A[X] = {}^t X A X$ である。

局所密度の重要性の背景を述べる。 A, B をそれぞれ成分を有理整数環 $\mathbb{Z}$ にもつ m, n 次 ($m \geq n$) の正定値対称行列とする。このとき

$$D(B, A) = \{ X \in M_{mn}(\mathbb{Z}) \mid A[X] = B \}$$

とおく。 A の種における類の代表系は有限個であることが知られている。これを $A_1, \dots, A_h$ とするとき、大局解を局所解で測る Siegel の定理がある：

$$\sum_{i=1}^h \frac{\# D(B, A_i)}{\# D(A_i, A_i)} \left(\sum_{i=1}^h \frac{1}{\# D(A_i, A_i)} \right)^{-1} = c_{m,n} \prod_p \alpha_p(B, A),$$

但し $c_{m,n}$ は m, n に依る定数。このように局所密度は二次形式の整数論において重要な不変量である。また、 A を特別にとるとその特殊値は Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数と一致するということを考えてもそれはさらなる重要性をもつ。しかし、その値を一般的に求めることは難しく、これまでにごくわずかな場合にしか知られていない。

[4] において北岡良之氏は次のような局所密度に付随する形式的べき級数を定義した：

$$P(B, A; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_p(p^r B, A) x^r.$$

このべき級数を精密に調べることにより、局所密度間の関係や漸近的なふるまいがわかる。北岡氏はこのべき級数に対して

- (1) このべき級数は有理関数である。
- (2) この有理関数の分母の多項式を求める。

という問題を提起し、 $A = \begin{pmatrix} O_k & E_k \\ E_k & O_k \end{pmatrix}$ (E_k, O_k はそれぞれ k 次の単位行列、零行列)

のときに (1), (2) を解いた。この問題は広中由美子氏によって $p \neq 2$ なる任意の素数 p について解決された ([2])。さらに S. Böcherer 氏、佐藤文広氏 ([1]) は $p = 2$ のとき特別な形の A, B に対して (1), (2) を示した。彼らはさらにこのべき級数を多変数化し次のべき級数を定義し、このべき級数に対して (1), (2) を証明した。

$B = B_0 \perp B_1 \cdots \perp B_s$ (但し、正方行列 U, V に対し、 $U \perp V = \begin{pmatrix} U & O \\ O & V \end{pmatrix}$ を表す) と分解されるとき

$$\begin{aligned} P((B_0, B_1, \dots, B_s), A; x_1, \dots, x_s) \\ = \sum_{r_1, \dots, r_s=0}^{\infty} \alpha_p(B_0 \perp p^{r_1} B_1 \perp \cdots \perp p^{r_s} B_s, A) x_1^{r_1} \cdots x_s^{r_s}. \end{aligned}$$

桂田英典氏 ([3]) もまた次のような多変数のべき級数を定義し、それに対して上の (1), (2) を示した。

$$\begin{aligned} R((B_1, \dots, B_s), A; x_1, \dots, x_s) \\ = \sum_{r_1 \geq \dots \geq r_s \geq 0} \alpha_p(p^{r_1} B_1 \perp \cdots \perp p^{r_s} B_s, A) x_1^{r_1} \cdots x_s^{r_s}. \end{aligned}$$

但しこれらの結果は A, B がある特別な条件の下でのみ示されている。

本論文では桂田英典氏との共同研究も含め、 p が任意の素数、 A, B が任意の非退化対称行列のときの多変数べき級数の有理性や分母の多項式を得ることに成功した。この結果は A が even unimodular のときは桂田英典氏によって証明され、筆者は $p = 2$, A が odd unimodular のときを証明した。さらに新たに形式的べき級数を定義し、桂田氏によって得られた命題を適用することにより、 A が一般のときの場合の結果を得ることができた：

定理 1. A, B をそれぞれ m, n 次の非退化な対称行列とする。 t を A の Witt index とする。 $B = B_1 \perp \cdots \perp B_s$ 、各 B_i の次数 n_i 、に対し

$$u_k = \min(n_1 + \cdots + n_s - 1, t)$$

$$v_k = \begin{cases} 1 & t \geq n_1 + \cdots + n_k \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおく。このとき $R((B_1, \dots, B_s), A; x_1, \dots, x_s)$ の分母は

$$\prod_{k=1}^s (1 - x_1 \cdots x_k)^{v_k} \prod_{i=0}^{u_k} (1 - p^{(n_1 + \cdots + n_k - i)(-m + n + i + 1)} (x_1 \cdots x_k)^2)$$

である。

定理 2. A, t, u_k, v_k は上の通り、 $B = B_0 \perp B_1 \perp \cdots \perp B_s$ とする。このとき $P((B_0, B_1, \dots, B_s), A; x_1, \dots, x_s)$ の分母は

$$\prod_{k=1}^s (1 - x_1 \dots x_k)^{v_k} \prod_{i=0}^{u_k} (1 - p^{(n_1 + \dots + n_k - i)(-m + n + i + 1)} (x_1 \dots x_k)^2).$$

である。

$s = 1$ 、 $B_0 = \emptyset$ のときは上述の全ての多変数べき級数は北岡氏によって定義されたべき級数に等しい。よって次の系が成り立つ；

系. A, B はそれぞれ m, n 次の非退化対称行列とする。 t を A の Witt index とする。 $u = \min(n - 1, t)$ 、 v は $t \geq n$ か否かに従って 1 または 0 とおく。このとき $P(B, A; x)$ は x の有理関数でその分母は

$$(1 - x)^v \prod_{i=0}^u (1 - p^{(n-i)(-m+n+i+1)} x^2)$$

で与えられる。

参考文献

- [1] Böcherer, S. and Sato, F., Rationality of certain formal power series related to local densities, Comment. Math. Univ. St. Paul. 36 (1987), pp 53–86
- [2] Hironaka, Y., On a denominator of Kitaoka's formal power series attached to local densities, Comment. Math. Univ. St. Paul. 37 (1988), pp 159–171
- [3] Katsurada, H., A certain formal power series of several variables attached to local densities of quadratic forms II, Proc. Japan Acad. 70 Ser.A (1994), pp 208–211
- [4] Kitaoka, Y., Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J. 103 (1986), pp 149–160

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 三 宅 敏 恒
副 査 教 授 菅 野 孝 三
副 査 教 授 中 村 郁
副 査 教 授 吉 田 知 行
副 査 助 教 授 桂 田 英 典

(室蘭工業大学大学院工学研究科)

学 位 論 文 題 名

On a denominator of a certain formal power series attached to local densities

(局所密度に付随する形式的べき級数の分母について)

二次形式は、2 次の同次式で与えられる多項式である。二次形式の理論は整数論の一分野として古くから研究されてきた。 x, y を変数、 a, b を整数とすると、2 変数の二次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ の研究は 2 次体の理論と密接に関係して、ガウス以来詳しく調べられてきた。特に、 d を整数とすると、 $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ をみたす整数解 (x, y) はよく知られている。

一般に、 A を m 次の対称行列、 X を $m \times n$ 行列としたとき $A[X] = {}^t XAX$ とおく。 A が整数係数で、 B が n 次の整数係数の対称行列のときに、 n^2 変数の方程式 $A[X] = B$ を整数の範囲で解きたい。言い換えれば、整数係数の行列 X を求める、あるいはそのような X の個数を求めたいというのは上の 2 変数の場合の一般化である。 $m = 2$ で B が定数のときが上に述べた場合である。 A, B を一般にしたとき、 $A[X] = B$ をみたす X の個数の計算、あるいは解が無限個ならばその解の個数の評価は容易ではない。このために色々な試みが行われている。Siegel はこれを直接計算するのではなく、 p を素数とすると p 進整数の中で解を考え、その結果を整数解に応用した。

$\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする。局所密度は

$$\alpha_p(B, A) = \lim_{e \rightarrow \infty} p^{-et} D(B, A, p^e)$$

で定義される。 t はある定数で、 $D(B, A, p^e)$ は $A[X] = B$ を $\text{mod } p^e$ で解いたときの解の個数である。 A が正定値のときには局所密度と整数解の個数の間には Siegel の公式と呼ばれる関係が存在する。局所密度を計算するのは困難であるので、北岡氏は $P(B, A; x) = \sum \alpha_p(p^r B, A) x^r$ で定義される整級数を定義してその級数が

(1) 有理関数であること、 (2) この関数の分母を求めること

を予想し、それを問題として提出し、 B が特別な行列のときに解決した。

この級数はさらに広中由美子、Boechrer、佐藤文広、桂田英典の各氏によって多変数化が行われ

た. すなわち

$$P(B, A; x_1, \dots, x_s) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_s=0}^{\infty} \alpha_p(B_0 \perp p^{r_1} B_1 \perp \cdots \perp p^{r_s} B_s, A) x_1^{r_1} \cdots x_s^{r_s}$$

と定義する. ここで $B = B_0 \perp p^{r_1} B_1 \perp \cdots \perp p^{r_s} B_s$ (対角成分が $B_0, \dots, B_s$ で他が零行列となる行列) である. この級数について, $p \neq 2$ 及び $p = 2$ の特別な場合に (1), (2) は解決されている. しかしこれらの結果は, 桂田氏のものを除き色々な理論を用いており, 初等的ではない. 更に $p = 2$ の場合には結果も部分的である.

$p = 2$ の困難さは 2 が $p \neq 2$ ならば $\mathbb{Z}_p$ で単数であるが, $p = 2$ ならば $\mathbb{Z}_p$ の中に逆元を持たないことから生じる. 申請者は上記の桂田氏の手法を応用して $p = 2$ を含む一般の場合にこの問題の解決を行った. ここでは, 上に述べた多変数のべき級数のみでは解決できず, 級数として, 変数のべきの間に不等号があるような不等式を必要とする. そのべきに不等号のあるような巾級数に対して上の (1), (2) の問題を解決し, さらに $P(B, A; x_1, \dots, x_s)$ をこれらの 1 次結合で表すことにより問題を解決した. ここで得られた無限級数および理論は $p \neq 2$ のときにも有効に用いられる.

申請者の結果は特別な予備知識なしに, 今までに得られている結果を含む一般的な結果を得たものであり, 二次形式の理論に貢献するところ大であると考え. よって, 審査担当者は申請者が北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格を有するものと認める.