博士（理学） 照 屋 保

学 位 論 文 題 名

Normal intermediate subfactors

（正規中間部分因子環）

学位論文内容の要旨

1982年にジョーンズによって始められた部分因子環の指数理論は彼が発見した結び目の不変量-ジョーンズ多項式によって, 量子群, 共形場理論, 可解格子模型, 低次元トポロジーなどを巻き込んだ現代数学の大きな流れを作りだした. このことによって1990年にジョーンズがフィールズ賞を受けたことは有名である.

本研究で, 指数理論における, 因子環と指数が有限の部分因子環の組を有限群の量子化だとみなし, 有限群論において重要な概念である正規性を II_1 型因子環の対の中間部分因子環に対して導入した. ある条件のもとでは有限群論のアナロジーが成立することも明らかにした.

因子環と有限群の外部的作用の不動点環に対しガロア対応が成り立つ, すなわち中間部分因子環に対し部分群が1対1対応（包含関係は逆）する事は古くから知られている. 従って中間部分因子環を研究することは有限群論において部分群を研究することに当たると言ってよい. そこで因子環とその部分因子環の中間部分因子環を量子化された群の部分群とみなし, 群論における正規部分群の概念を中間部分因子環に次のように拡張した.

Def. 3.1. $N \subset M$ を指数有限の因子環と部分因子環の対とし, $N \subset M \subset M_1 \subset M_2$ を $N \subset M$ の Jones tower とする. $N \subset M$ の中間因子環 K が正規中間部分因子環 (*normal intermediate subfactor*) であるとは $e_K \in \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$ $(= N' \cap M_1$ の中心$)$ かつ $e_{K_1} \in \mathcal{Z}(M' \cap M_2)$, となることとする. ただし, K_1 は M の K による拡大で e_K と e_{K_1} はそれぞれ $K \subset M$, $K_1 \subset M_1$ に対する Jones projection とする.

有限群が因子環に外部的に作用している時, 次の命題が成り立つ.

命題1. α を有限群 G の因子環 R 上への外部的作用とし, N を G の作用による不動点環 $R^G = \{x \in R \mid \alpha_g(x) = x, \forall g \in G\}$, $M = R$ とする. H を G の部分群をするとき, H が正規部分群である必要かつ十分条件は, H の作用による不動点環 $K = R^H$ が $N \subset M$ の正規中間部分因子環であることである.

命題2. α を有限群 G の因子環 R 上への外部的作用とし, M を R の G による接合積 $R \times_\alpha G$, $N = R$ とする. H を G の部分群をするとき, H が正規部分群である必要かつ十分条件は, R の H による接合積 $K = R \times_\alpha H$ が $N \subset M$ の正規中間部分因子環であることである.

上の命題により正規部分群の概念が 不動点環, 接合積 の立場によらず, 中間因子環に拡張

されていることがわかる.

指数有限で "depth" が 2 の因子環と部分因子環 $N \subset M$ に対して有限次元 Hopf C^* 代数 (Kac 環) A が存在して その N への外部的作用 α の接合積により $(N \subset M) \simeq (N \subset N \times_\alpha M)$ となることが知られている. 残念ながら, すべての中間因子環には部分 Hopf C^* 代数は対応していない. しかし, つぎの定理が成り立つことを示した.

Theorem 4.5. "depth" が 2 の因子環と部分因子環 $N \subset M$ の中間因子環 K に対し, $N \subset K$ の "depth" が 2 になる必要かつ十分条件は

$$e_K \in \mathcal{Z}(N' \cap M_1),$$

となることである. ただし, e_K は $K \subset M$ に対する Jones projection, M_1 は M の N による拡大とする.

上の定理より, つぎの定理が導かれる.

Theorem 4.6. $N \subset M$ を "depth" が 2 の因子環と部分因子環とする. このとき, 中間因子環 K が正規中間部分因子環である必要かつ十分条件は, $N \subset K$ と $K \subset M$ の "depth" は両方とも 2 になることである.

つまり, $N \subset N \times_\alpha A$ の中間因子環 K が正規中間部分因子環のときは, A の部分 Hopf C^* 代数 B が対応して, $(N \subset K) \simeq (N \subset N \times_\alpha B)$ となることを示した. さらに B は Hopf 代数での意味で, A の正規部分 Hopf 代数になることも明らかにした.

既約な因子環と部分因子環 $N \subset M$ の中間因子環全体の集合を $\mathcal{L}(N \subset M)$, 正規中間部分因子環全体の集合を $\mathcal{N}(N \subset M)$ と書くことにする. $\mathcal{L}(N \subset M)$ は

$$K_1 \vee K_2 = (K_1 \cup K_2)'' \text{ と } K_1 \wedge K_2 = K_1 \cap K_2.$$

によって定義される和 $\vee$ と積 $\wedge$ により束になる. さらに, $N \subset M$ の指数が有限のとき $\mathcal{L}(N \subset M)$ が有限束になる. 本研究において私は $N \subset M$ の "depth" が 2 のとき, $\mathcal{N}(N \subset M)$ は $\mathcal{L}(N \subset M)$ の部分束であり, 更に modular 束 になることを明らかにした. このことは有限群論において『主組成列の長さが一定である』ことに対応している (**Theorem 4.11**).

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　岸　本　晶　孝
副　査　　教　授　　林　実　樹　廣
副　査　　教　授　　井　上　純　治
副　査　　助教授　　山ノ内　毅　彦
副　査　　教　授　　綿　谷　安　男（九州大学大学院数理学研究科）

学 位 論 文 題 名

Normal intermediate subfactors

（正規中間部分因子環）

作用素環における指数理論は、1982 年の Jones による創始以来飛躍的に発展し、数学の他の分野にも大きな影響を与えるまでになった。この理論の基本的対象は II_1 型因子環 M, N の包含関係 $N \subset M$ であるが、申請者は、この包含関係に対して、$N \subset K \subset M$ を満たす因子環（中間部分因子環）K の可能性を研究した。具体的には、有限群論との類似にもとづき、その一般化としての包含関係 $N \subset M$ に対して、部分群に相当する中間部分因子環 K が正規であるという概念を導入し、少なくとも特定の場合にその正当性を立証した。

上記包含関係 $N \subset M$ に対して、まず指数 $[M : N]$ という数が対応させられる。（この論文で考えるのは、指数が有限であるような既約な包含関係である。）さらに、特定の条件のもとで関係 $N \subset M$ そのものを決定する代数的不変量として、すでにパラグループという概念が導入されている。パラグループは群の一般化とみなされるが、どこまで群との類似がきくのか不明な点が多い。申請者は、パラグループの構成に至るまで指数理論で培われてきた理論と技術を用いて、この点の解明をめざす。

関係 $N \subset M$ の典型的例は、因子環 N と有限群 G に対して、N 上での G の外部的作用による接合積 $N \times G$ を M とすることで得られる。このとき、（N が特定の場合）この外部的作用は本質的に一意に存在し、関係 $N \subset M$ は群 G を一意に規定する。この意味で、一般の関係 $N \subset M$ は有限群の概念の一般化であるとみなされるのである。さらに、G の部分群 H による N の接合積 K は、$N \subset M$ の中間部分因子環になり、逆に中間部分因子環はすべてこの形で得られる。この意味で、中間部分因子環は群論における部分群に対応する。

群の概念の一般化として、すでに Hopf 代数の概念が知られているが、包含関係 $N \subset M$ はこれをも一般化する。関係 $N \subset M$ が、上述の群に対すると同様の意味で、（有限次元）Hopf 代数に対応する場合、これは、別に導入されている深さの概念を用いて、深さ 2 として特徴づけられている。

部分群の正規性の概念は基本的に重要である。しかしながら、中間部分因子環に対してこの概念を移植することは、申請者においてはじめて一定の成功をおさめたといえる (Definition 3.1)。これは準正規性の

概念 (Watatani) よりも強い概念であり (Proposition 3.4)、上述の典型的例（およびその双対版）で、中間部分因子環の正規性はもちろん対応する部分群の正規性に対応する (Proposition 3.3, Lemma 3.2)。もっと一般的に、関係 $N \subset M$ が深さ 2 である場合においても、中間部分因子環の正規性は正確に、対応する部分 Hopf 代数の正規性に対応する (Theorem 4.7)。また、正規中間部分因子環の全体が束になり (Theorem 4.9)、群論における、正規部分群の極大鎖の長さがその取り方によらず一定であるという結果も、上述の深さ 2 の場合に、正規部分群を正規中間部分因子環と読みかえることで成立する (Theorem 4.11)。

もちろん包含関係 $N \subset M$ は上述の場合にとどまらない。申請者は、上述の範疇に属さない幾つかの場合にも、中間部分因子環が正規であるための判定条件を与えている (Proposition 5.1, Theorem 5.3, Proposition 5.6, Theorem 5.7)。さらにその応用例として、正規中間部分因子環の興味深い構成法を与えている。また、関係 $N \subset M$ の自己同型写像の強外部性 (Choda-Kosaki) との関連において、正規性に関する結果も与えている (Theorem 5.7)。

以上の結果は、包含関係 $N \subset M$ の中間部分因子環の研究を通じて、群の一般化としての包含関係の理解に十分な寄与をなすものである。よって審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。