博士（理　学）　小　柳　常　平

学 位 論 文 題 名

A study of closed hypersurfaces with constant mean curvature in a Riemannian manifold

（リーマン多様体の平均曲率一定な閉超曲面の研究）

学位論文内容の要旨

$(n+1)$ 次元リーマン多様体 R^{n+1} に埋め込まれた超曲面 V^n を考える。 V^n の第１基本テンソルを g_{ba}、第２基本テンソルを h_{ba} とするとき、V^n の主曲率、即ち、特性方程式 $det(h_{ba}-kg_{ba})=0$ の根を $k_1,k_2,\cdots,k_n$ で表すならば V^n の第 ν 番目の平均曲率 H_ν は 次の式

$$\binom{n}{\nu}H_\nu=\sum_{c_1<c_2<\cdots<c_\nu}k_{c_1}k_{c_2}\cdots k_{c_\nu}\qquad(1\leq\nu\leq n)$$

で定義される。特に、ユークリッド空間 E^3 の曲面 V^2 にたいして、$H=(1/2)(k_1+k_2)$, $K=k_1k_2$ とおき、それぞれ V^2 の平均曲率、ガウス曲率と言う。 従って、H は H_1 と等しく、K は H_2 と等しい。

球は平均曲率 H が一定な閉曲面である、ことはよく知られている。 ここで、閉曲面とはコンパクト、連結、境界のない曲面を意味する。閉曲面のすべての点で $K>0$ が成り立つとき、その閉曲面を卵形面と言う。1900 年、E^3 の平均曲率 H が一定な卵形面は球である、ことが H. Liebmann によって証明された。 この結果が閉曲面の色々な興味ある研究の出発点となった。 多数の研究者によっていろいろな観点から球の特徴づけが研究され、多数の興味ある報告がなされた。 これらの研究で、ミンコフスキー・タイプの積分公式が一つの重要な役割を担ってきた。

V^n の点 P_0 で h_{ba} が g_{ba} に比例するとき、P_0 を臍点と言う。 P_0 が臍点であるには 点 P_0 で n 個の主曲率がすべて等しく、かつその時に限る、ことが分かる。 桂田芳枝は共形キリング・ベクトル場を許容するリーマン多様体 R^{n+1} の有向閉超曲面 V^n に対する ミンコフスキー・タイプの積分公式を導き、R^{n+1} の臍点超曲面のある特徴づけを与えた。 その後、多くの研究者によってリーマン多様体の有向閉超曲面の類似の問題が議論された。

E^{n+1} の有向閉超曲面 V^n のすべての点が臍点であるならば その超曲面は球に等長になる。しかし、一般のリーマン多様体では、たとえ有向閉超曲面のすべての点が臍点であっても同じ結果は期待できない。 いかなる条件でリーマン多様体の臍点超曲面が球に等長になるかは興味ある問題の一つである。 この問題について、小畠の定理を用いて証明された結果が幾つかある。

共円変換は測地円を他の測地円に移す共形変換である、と定義される。 もしもベクトル場が対応する一径数局所変換群を生成するならば 共円的、又は共形的である、と言う。 固有の共形キリング・ベクトル場 ξ^i は、ξ^i に随伴した 定数と異なるあるスカラー場 Ψ に対して、共形キリング方程式

$$\pounds_\xi G_{ji}\equiv\nabla_j\xi_i+\nabla_i\xi_j=2\Psi G_{ji}\tag{1}$$

で特徴づけられる、ここで G_{ji}、$\pounds_\xi G_{ji}$ そして ∇_i は それぞれ R^{n+1} の計量テンソル、 ξ^i に関する G_{ji} のリー微分 そして G_{ji} で構成されるクリストッフエルの記号 $\left\{{k \atop ji}\right\}$ に関する共変微分の作用素である。

ξ^i が共円的であるためには随伴スカラー場 Ψ が方程式

(2) $$\nabla_j \nabla_i \Psi = \phi G_{ji}$$

を満たすのが必要十分である、ここでϕはあるスカラー場である。 (2) を満たすスカラー場Ψを concircular (共円的) スカラー場と言う。特に、ϕがΨに関して一次である、即ち、$\phi = \rho\Psi + \sigma$、ここでρは零でない定数、σは定数、のとき、Ψは special concircular (簡単に、SC-) スカラー場という。

著者は共形キリング・ベクトル場ξ^iを許容するリーマン多様体、又は SC-スカラー場Ψを許容するリーマン多様体の平均曲率一定な有向閉超曲面を研究して来た。H_2が定数、かつV^nの各点で主曲率がすべて正ならば H_2は正の定数になる、何故ならば $\binom{n}{2}H_2 = \sum_{d<c} k_d k_c$ であるから。 この事は H_2が一定な閉超曲面の研究の転換点になった。 そして、次のような桂田の定理の一つの一般化を得た。

定理 1 R^{n+1}を共形キリング・ベクトル場 ξ^iを許容する有向な定曲率空間とし、V^nを

1) 第 2 平均曲率 H_2が正の定数、

2) $C^i\xi_i$は V^n上で定符号、ここで C^iは V^nの法ベクトルである、

ような有向閉超曲面とする。 その時、V^nのすべての点は臍点である。

桂田は 共形キリング・ベクトル場 ξ^iを許容するアインシュタイン空間の 平均曲率 H_1が一定な有向閉超曲面は全臍曲面である、ことを初めて証明した。 著者は SC-スカラー場Ψを許容するリーマン多様体で、この桂田の定理と類似な定理を考え、次の結果を得た。

定理 2 R^{n+1}を SC-スカラー場 Ψを許容する有向なリーマン多様体とし、V^nを

1) 第 1 平均曲率 H_1が零でない定数、

2) $C^i\Psi_i$は V^n上で定符号、ここで $\Psi_i = \nabla_i\Psi$ である、

ような有向閉超曲面とする。 更に、R^{n+1} が次の条件の一つを満足すると仮定する、

a) R^{n+1}は調和曲率、即ち、$\nabla_k R_{ji} = \nabla_j R_{ki}$をもつ、ここで R_{ji}は R^{n+1}のリッチ・テンソルである、

b) R^{n+1}は平行なリッチ・テンソル、即ち, $\nabla_k R_{ji} = 0$ をもつ、

c) R^{n+1}は共形的に平坦で、かつスカラー曲率 Rが定数である、

d) R^{n+1}は $\nabla_k R_{ji} + \nabla_j R_{ik} + \nabla_i R_{kj} = 0$ を満たす、

e) $R^{ji}R_{ji}$が定数である、

f) R^{n+1}は共形的に平坦で、かつ V^n上に $S(P_0) = 0$ を満たす点 P_0がある、ここで S_{ji} は $R_{ji} + n\rho G_{ji}$で定義される対称なテンソルで、$S = S_{ji}G^{ji}$である。 その時、V^nのすべての点は臍点である。

定理 1 を証明するにはミンニフスキー・タイプの積分公式より

$$\frac{2}{n(n-1)} \int_{V^n} \nabla_c p_a{}^c \beta^a \, dA + (n-2) \int_{V^n} \{H_1 H_2 - H_3\} C^i \xi_i \, dA = 0$$

を導く、ここで p_{ab}は $h_c{}^c h_{ab} - h_a{}^c h_{cb}$で定義される対称なテンソル、$p_a{}^c = p_{ab} g^{bc}$、 g_{bc}は V^nの誘導計量テンソル、∇_c はフアン・デア・ベルデン-ボルトロチの共変微分の作用素、そうして dA は V^n の面素である。 定曲率空間で H_2が正の定数である V^nに対して、V^n上で $\nabla_c p_a{}^c = 0$ が証明される。 従って、

$$\int_{V^n} \{H_1 H_2 - H_3\} C^i \xi_i \, dA = 0$$

を得る。 次に H_1は V^n上で定符号になることが分かるので、$H_1H_2 - H_3$は次のように書き直すことができる、

$$H_1 H_2 - H_3 = \frac{1}{H_1}\{H_2(H_1^2 - H_2) + (H_2^2 - H_1 H_3)\}。$$

また、$H_1^2 - H_2 \geq 0$ および $H_2^2 - H_1 H_3 \geq 0$ が知られているから $H_1H_2 - H_3$は V^n上で定符号にな

る。　従って、上の積分から $H_1H_2 - H_3 = 0$ を得、結局、V^n上で $H_1^2 - H_2 = 0$ になる。　一方で $H_1^2 - H_2 = \left\{1/n^2(n-1)\right\} \sum_{a<b}(k_b - k_a)^2$ だから

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n、$$

即ち、V^nのすべての点は臍点である。

定理 2 を証明するには $\Phi = \rho\Psi + \sigma$とおけば、スカラー場 Φは $\nabla_j\nabla_i\Phi = \rho\Phi G_{ji}$を満足するので、ベクトル場 $\Phi_i(= \nabla_i\Phi)$ についてのミンコフスキー・タイプの積分公式より、

$$-\frac{1}{n}\int_{V^n} R_{ij}B_a{}^iC^j\phi^a dA + (n-1)\int_{V^n}(H_1^2 - H_2)C^i\Phi_i\, dA = 0$$

を導く、ここで $B_a{}^i = \partial x^i/\partial u^a$である。　その時、$R^{n+1}$が a) から f) までのいずれのときにも $S_{ji} = 0$、即ち、V^n上で $R_{ji} = -n\rho G_{ji}$を証明して、

$$\int_{V^n}(H_1^2 - H_2)C^i\Phi_i\, dA = 0$$

を導く。このとき、$C^i\Psi_i$が定符号ならば $C^i\Phi_i$も定符号になることが分かるので、V^n上で $H_1^2 - H_2 = 0$ である。　従って、上と同様に V^nのすべての点は臍点になる。

最後に 定理 1、又は定理 2 の結果を用いて、小畠の定理を考えに入れながら、R^{n+1} の有向閉超曲面 V^n が球に等長になるための条件を与え、**定理 3、4、5、6** を得た。

学位論文審査の要旨

主　査　教　授　山　口　佳　三
副　査　教　授　諏　訪　立　雄
副　査　教　授　泉　屋　周　一
副　査　助教授　清　原　一　吉

学 位 論 文 題 名

A study of closed hypersurfaces with constant mean curvature in a Riemannian manifold

(リーマン多様体の平均曲率一定な閉超曲面の研究)

ユークリッド空間内の球面を特徴付ける問題は、リーマン幾何学における古典的問題である。本論文において、申請者はリーマン多様体の超曲面として現れる球面の特徴付けについて新しい結果を得ている。

$(n+1)$ 次元リーマン多様体 R^{n+1} に埋め込まれた超曲面 V^n を考察の対象とする。V^n の主曲率（すなわち第２基本形式の固有値）を $k_1, k_2, \cdots, k_n$ とするとき V^n の第 ν 番目の平均曲率 H_ν は、$k_1, k_2, \cdots, k_n$ の ν 次の基本対称関数によって

$$\binom{n}{\nu} H_\nu = \sum_{c_1 < c_2 < \cdots < c_\nu} k_{c_1} k_{c_2} \cdots k_{c_\nu} \qquad (1 \leq \nu \leq n)$$

で定義される。特に、ユークリッド空間 E^3 の曲面 V^2 にたいして、$H = (1/2)(k_1 + k_2)$, $K = k_1 k_2$ とおき、それぞれ V^2 の平均曲率、ガウス曲率と言う。

球面は平均曲率 H が一定な閉曲面である。　ここで、閉曲面とはコンパクト、連結、境界のない曲面を意味する。閉曲面のすべての点で $K > 0$ が成り立つとき、その閉曲面を卵形面と言う。1900 年、E^3 の平均曲率 H が一定な卵形面は球面である、ことが H. Liebmann によって証明された。　この後、　多数の研究者によっていろいろな観点から球面の特徴づけが研究され、多数の興味ある報告がなされた。これらの研究で、ミンコフスキー・タイプの積分公式が一つの重要な役割を担ってきた。

V^n の点 P_0 で 第２基本形式が第１基本形式に比例するとき、P_0 を臍点と言う。P_0 が臍点であるには 点 P_0 で n 個の主曲率がすべて等しく、かつその時に限る。　桂田芳枝氏は共形キリング・ベクトル場を許容するリーマン多様体 R^{n+1} の有向閉超曲

面 V^nに対する ミンコフスキー・タイプの積分公式を導き、R^{n+1}の臍点超曲面 (全臍超曲面と称す) のある特徴づけを与えた。 その後、多くの研究者によってリーマン多様体の有向閉超曲面の類似の問題が議論された。

E^{n+1}の有向閉超曲面 V^nのすべての点が臍点であるならば その超曲面は球面に等長になる。 しかし、一般のリーマン多様体では、たとえ有向閉超曲面のすべての点が臍点であっても同じ結果は期待できない。 いかなる条件でリーマン多様体の全臍超曲面が球面に等長になるかは興味ある問題の一つである。 この問題について、小畠の定理を用いて証明された結果が幾つかある。

共円変換は測地円を他の測地円に移す共形変換である、と定義される。 もしもベクトル場が対応する一径数局所変換群を生成するならば 共円的、又は共形的である、と言う。固有の共形キリング・ベクトル場ξ^iは、ξ^iに随伴した 定数と異なるあるスカラー場Ψに対して、共形キリング方程式

$$(1) \qquad \pounds_\xi G_{ji} \equiv \nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j = 2\Psi G_{ji}$$

で特徴づけられる、ここで G_{ji}、$\pounds_\xi G_{ji}$ そして ∇_i は それぞれ R^{n+1}の計量テンソル、ξ^iに関する G_{ji}のリー微分 そして G_{ji}で構成されるクリストッフエルの記号$\left\{ {k \atop ji} \right\}$に関する共変微分の作用素である。

ξ^iが共円的であるためには随伴スカラー場Ψが方程式

$$(2) \qquad \nabla_j \nabla_i \Psi = \phi G_{ji}$$

を満たすのが必要十分である、ここでϕはあるスカラー場である。 (2) を満たすスカラー場Ψを concircular (共円的) スカラー場と言う。特に、ϕがΨに関して一次である、即ち、$\phi = \rho\Psi + \sigma$、ここでρは零でない定数、σは定数、のとき、Ψは special concircular (簡単に、SC-) スカラー場という。

申請者は共形キリング・ベクトル場ξ^iを許容するリーマン多様体、又は SC-スカラー場Ψを許容するリーマン多様体の平均曲率一定な有向閉超曲面を研究して来ている。そして、次のような桂田の定理の一つの一般化を得た。

定理 1 R^{n+1}を共形キリング・ベクトル場 ξ^iを許容する有向な定曲率空間とし、V^nを

1) 第 2 平均曲率 H_2が正の定数、

2) $C^i\xi_i$は V^n上で定符号、ここで C^iは V^nの法ベクトルである、

ような有向閉超曲面とする。 その時、V^nのすべての点は臍点である。

桂田はさらに 共形キリング・ベクトル場 ξ^iを許容するアインシュタイン空間の 平均曲率 H_1が一定な有向閉超曲面は全臍超曲面である、ことを示した。 これに対して、申請者は SC-スカラー場Ψを許容するリーマン多様体で、次の結果を得た。

定理 2 R^{n+1}を SC-スカラー場 Ψを許容する有向なリーマン多様体とし、V^nを

1) 第 1 平均曲率 H_1が零でない定数、

2) $C^i\Psi_i$は V^n上で定符号、ここで $\Psi_i = \nabla_i\Psi$ である、

ような有向閉超曲面とする。 更に、R^{n+1} が次の条件の一つを満足すると仮定する、

a) R^{n+1}は調和曲率、即ち、$\nabla_k R_{ji} = \nabla_j R_{ki}$をもつ、ここで R_{ji}は R^{n+1}のリッチ・テンソルである、

b) R^{n+1}は平行なリッチ・テンソル、即ち, $\nabla_k R_{ji} = 0$ をもつ、

c) R^{n+1}は共形的に平坦で、かつスカラー曲率 Rが定数である、

d) R^{n+1}は $\nabla_k R_{ji} + \nabla_j R_{ik} + \nabla_i R_{kj} = 0$ を満たす、

e) $R^{ji}R_{ji}$が定数である、

f) R^{n+1}は共形的に平坦で、かつ V^n上に $S(P_0) = 0$ を満たす点 P_0がある、ここで S_{ji} は $R_{ji} + n\rho G_{ji}$で定義される対称なテンソルで、$S = S_{ji}G^{ji}$である。 その時、V^nのすべての点は臍点である。

さらに 定理 1、又は定理 2 の結果を利用し、小畠の定理を用いて、R^{n+1} の有向閉超曲面 V^n が球面に等長になるための条件を与え、定理 **3**、**4**、**5**、**6** を得ている。

この学位論文の内容は既に、Hokkaido Mathematical Journal に一部掲載され、残部は投稿され掲載が決定している。

審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。