

学 位 論 文 題 名

Capillary problem for singular degenerate parabolic
equations on a half space

(半空間における特異点のある退化放物型方程式のキャピラリイ境界値問題)

学位論文内容の要旨

近年、物理的状態が異なる物質が交じりあわず共存している現象が、科学のいろいろな分野において研究されるようになった。例えば、過冷却水の中で氷がどのように成長するかという問題、また空気中の雪の結晶成長、金属粒界の運動などがある。物質の2相を隔てる部分は通常薄く曲面とみなせる。2相を隔てる曲面をしばしば界面とよばれることがある。我々が扱う問題は、界面の成長速度が界面の局所的な状態のみで決まる場合を考察する。典型的な例は、界面の成長速度が界面の各点の平均曲率に従って動く運動である。この例は微分幾何学でも重要である。また物理学者のGurtinが提唱した異方性のある曲率流方程式などがある。界面の運動方程式に対して解析的な基本的問題は、与えられた初期界面に対して運動方程式をみたす界面の族を、時間大域的に作れるかという問題がある。一般には初期の界面をどのように滑らかなものを選んできても、有限時間内に特異点がある可能性がある。古典的な解が期待できない場合、しばしば弱い意味の解を導入することがある。1978年、Brakkeは幾何学的測度論的な大域解を界面の成長速度が界面の各点の平均曲率に従って動く運動に対して構成したが一意性は示されていない。これに対して1990年に陳-儀我-後藤、Evans-Spruckらがほぼ同時期に時間とともに動く相境界に対して等高面と呼ばれる解析方法を導入した。そこでは、界面をある補助関数の等高面とみなしその補助関数をもちいて界面の運動方程式を偏微分方程式であらわした。このとき方程式は特異点のある退化放物型方程式になる。彼らは、この方程式に対してCrandall-Lionsによる粘性解(viscosity solution)という弱解を導入して一意的な大域弱解を構成することに成功した。

申請者は、界面が与えられた境界と一定の角度を保ちながら時間発展する界面の運動を考察した。界面が境界と直角に交わって動く場合、このとき方程式はNeumann境界値問題となるが儀我-佐藤によって一般の領域で一意的な大域弱解を構成することに成功している。申請者がこの論文で考察する問題は、Neumann問題よりさらに一般的なCapillary境界値問題と呼ばれるものである。この問題は、Owen-Sternberg, Owen-Rubinstein-Sternbergらが研究したcontact angle境界値問題におけるAllen-Cahn方程式の特異極限に形式的に一致する。申請者は、この論文で領域が半空間の場合に、特異点のある退化放物型方程式のCapillary境界値問題を考察した。この論文の目標は儀我-佐藤のNeumann問題の論文同様に一意的な大域弱解を構成することにある。ここでの証明でもっとも重要なことは

、Capillary境界値問題に対する比較定理を示すことである。この比較定理の証明では境界条件を考慮した関数を構成する必要がある。複雑な境界条件にたいする関数を構成することはかなり困難であったが、大沼-佐藤の論文で用いたMinkowski関数のアイデアを使ってこの困難さを克服することができた。

また存在証明に関して、初期値をみたす粘性優解および粘性劣解を作り、Perronの方法を用いて初期値境界値問題に対する粘性解の存在を示した。粘性優解および粘性劣解の作り方のアイデアは比較定理の中で構成した関数の考え方が基本になっている。さらに我々の扱う界面運動方程式は、geometricという性質をみたす。この特徴から各等高面は他の等高面に影響を受けないことがCapillary境界値問題に対してもいえる。これらの結果と比較定理および存在定理より、Neumann問題における儀我-佐藤の論文と同様に与えられた初期界面に対する一意的な大域弱解を構成することができた。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 儀 我 美 一

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 久保田 幸 次

副 査 教 授 小 澤 徹

学 位 論 文 題 名

Capillary problem for singular degenerate parabolic equations on a half space

(半空間における特異点のある退化放物型方程式のキャピラリイ境界値問題)

最近、物質の2相を隔てる相境界の運動が非平衡・非線形現象の典型として科学のいろいろな分野において研究されるようになった。そのひとつの典型例として金属の焼きなまし時の粒界の運動がある。この場合は、2相を隔てる相境界の成長速度が、その局所的な形状にのみよって決まると考えられる。相境界はしばしば界面と呼ばれ、その運動法則を与える方程式は、界面運動方程式と呼ばれる。解析的な基本問題のひとつとして与えられた初期界面に対して界面運動方程式を満たす界面の族を時間大域的に構成できるかというものがある。有限時間内で界面が消滅したり、特異点が発生したりするので、時間大域的に界面の成長をとらえるには、微分できない解、つまり弱解というものを考える必要がある。これに対しては、例えば幾何学的測度論を用いる方法、また、著者もその理論的基礎の整備に貢献した等高面の方法がある。等高面の方法では、界面をある補助関数の等高面として表し、その補助関数の満たす、等高面方程式と呼ばれる偏微分方程式を研究することにより、界面運動方程式の弱解を構成する。しかし、この偏微分方程式は、特異点をもつ退化放物型方程式で解析的に扱いにくく、いわゆる粘性解の理論を拡張する必要がある。著者の初期の研究により等高面方程式の粘性解の理論は、非有界な界面が扱えるように大きく成長した。

著者は本論文においては、界面がある固定された領域内にあって、その境界と界面が指定された角を保ち、界面運動方程式に従って運動する問題を扱っている。このような問題は、粒界が他の粒界にぶつかっているような状況を考えれば必然的に現れる。しかし、角度が 90° の場合を除いて、ほとんど研究されていなかった。このような問題に対して等高面の方法を確率するには、等高面方程式にキャピラリイ境界条件に課した境界値問題を考察する必要がある。著者は半空間であるが理論の鍵となる比較定理を巧妙な方法で導いている。この結果は、自由境界条件付拡散方程式の解のグラフの運動の解析に使える可能性があり、それ自身重要である。

著者は鍵になる比較定理を示すのにあたり、キャピラリイ境界条件によって決まる凸集合のミンコフスキー関数を試験関数を用いた。もし境界と界面がなす角が 90° ならば、凸集合として球をとればよいが、そうでない場合は、工夫を要する。この点が本論文の最も独創的なところである。この巧妙な試験関数の構成法は、特異点をもつ表面エネルギーによる界面の運動に対する等高面の方法を確立するのに著者がかつて用いたものの自然な発展と考えられる。また、著者は等高面方程式に対して比較定理だけでなく、キャピラリイ境界条件を課した初期値境界値問題の解の存在を示した。解の構成法はいわゆるペロンの方法に基づいているが、そこでは与えられた初期値をもつ初期値境界値問題の優解及び劣解を構成しなければならない。著者は、比較定理で用いたミンコフスキー関数をうまく使い、優解、劣解の構成に成功している。またキャピラリイ境界条件を課した界面運動方程式も、いわゆる幾何学的という条件を満たすことがわかる。こうして本論文では等高面の方法による境界条件付界面運動方程式の弱解の時間大域的な一意的存在とその比較定理が示される。

著者は数年前より、界面運動方程式に境界条件を課した問題の等高面の方法の基礎理論の確立に興味をもっている。界面と境界が 90° の角をなす場合には、考えている固定領域が凸の場合、そうでない一般の場合についてそれぞれ等高面の方法を著者は完成させている。しかし、そこでの手法はそのままでは、キャピラリイ境界条件-つまり界面と境界のなす角

合が必ずしも直角でない場合-については、拡張できない。その困難を最初に克服したものが本論文である。特異点をもたない退化放物型方程式に対してキャピラリ境界条件を課し、比較定理を示した研究がフランスの研究者によってなされているが、等高面方程式は特異点があるのでこの結果を使用できない。したがって本論文は短く簡潔ではあるが、等高面の方法、また粘性解の理論に対して重要な貢献と考えられる。

なお著者は最近半空間でなく一般の領域についても等高面の方法を確立することに成功している。しかしその証明は、大変複雑で扱える方程式の仮定もより強くなってしまっている。また、証明も本論文とは根本的に異なるものである。このような事情を考えると本論文は、一見簡単な場合を扱ってはいるがその証明の美しさ、明せきさにより学位論文として十分価値があると確信している。

本論文は、国際的にも高い評価を受けており、国際的な学術雑誌 **Differential and Integral Equations** に掲載されることになっている。

著者は、等高面方程式の境界値問題についての新知見を得たものであり、等高面の方法に大きく貢献している。

よって著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認める。