

学位論文題名

Boundedness and invertibility of
some singular integral operators

(ある特異積分作用素の有界性と可逆性)

学位論文内容の要旨

単位円周 $T = \{z; |z| = 1\}$ 上の正規化された Lebesgue 測度 $dm(e^{it}) = dt/2\pi$ について可積分な関数 f の特異積分 Sf を

$$Sf(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (\text{a.e. } \zeta \in T)$$

と定める。ただし、積分は Cauchy の主値積分とする。 f の Hilbert 変換 $\tilde{f}$ は

$$Sf(\zeta) - \int_T f dm = i\tilde{f}(\zeta) \quad (\text{a.e. } \zeta \in T)$$

によって定める。analytic projection P_+ と、co-analytic projection P_- を

$$P_+ = \frac{I + S}{2}, \quad P_- = \frac{I - S}{2}$$

と定める。ただし、 I は恒等作用素を表す。 T 上の有界 m -可測関数 α, β について

$$S_{\alpha, \beta} = \alpha P_+ + \beta P_- = (\alpha - \beta)P_+ + \beta I = \frac{\alpha + \beta}{2}I + \frac{\alpha - \beta}{2}S$$

は特異積分作用素と呼ばれる。 T 上の非負値 m -可積分関数 W を荷重関数という。

$$\|f\|_W = \left\{ \int_T |f|^2 W dm \right\}^{1/2}$$

が有限であるような m -可測関数 f の全体からなる Hilbert 空間を $L^2(W)$ で表し、この積分値を f の荷重付きノルムという。三角多項式の全体 p は $L^2(W)$ の中でこのノルムについて dense である。

歴史的には、Hardy, Riesz, Gaposkin 達の研究の後、1960 年の論文で Helson-Szegö は予測理論と関連して荷重関数 $W (\neq 0)$ について Hilbert 変換が $L^2(W)$ 上の有界作用素であるための必要十分条件は

$$W = e^{u+v}, \quad |v| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

なる実数値有界 m -可測関数 u, v と正定数 ε が存在することであるという有名な定理を示した。このような W の全体を (HS) で表す。1980 年の論文で Koosis は

Kolmogorov の定理と Adamyan-Arov-Krein のアイデアを用いて Hilbert 変換が $L^2(W)$ から $L^2(U)$ への有界作用素になる荷重関数 $U(\neq 0)$ が存在するための必要十分条件は $\int_T W^{-1} dm < \infty$ であることを示した。Arocena-Cotlar-Sadosky は Cotlar-Sadosky の lifting 定理と Hilbert 空間における議論を用いて作用素 $S = S_{1,-1}$ の $L^2(W)$ における有界性を精密に調べた。 $W \in (HS)$ のとき $S_{\alpha,\beta}$ は $L^2(W)$ 上の有界作用素になるが、 $W \notin (HS)$ のとき $S_{\alpha,\beta}$ の有界性は調べられていなかった。一方、 $S_{\alpha,\beta}$ の $L^2(W)$ における下への有界性や可逆性については、 $W \in (HS)$ のとき Toeplitz 作用素と関連して Widom-Devinatz-Rochberg によって明らかにされたが、 $W \notin (HS)$ のときは調べられていなかった。

本論文は荷重関数 W と有界 m -可測関数 α, β が一般の場合について、荷重付き空間 $L^2(W)$ 上の特異積分作用素 $S_{\alpha,\beta}$ の有界性と可逆性を Cotlar-Sadosky の lifting 定理と Hilbert 空間における議論を用いて精密に調べている。

T 上の非負値 m -可測関数 r について、

$$W = Ce^{u+\bar{v}}, \quad r^2 e^u + e^{-u} \leq 2 \cos v, \quad |v| \leq \pi/2$$

を満たす実数値 m -可積分関数 u, v と非負定数 C が存在するような実数値 m -可測関数 W の全体を $(HS)(r)$ で表す。 T 上の m -可積分関数 Q が $|Q| = 1$ を満たし、 Q の負のフーリエ係数がすべて零であるとき、 Q を inner 関数という。本論文の主定理は次の定理である。

定理 T 上の有界 m -可測関数 α, β と荷重関数 W が $(\alpha - \bar{\beta})W \neq 0$ を満たしているとき、次の条件は互いに同値である。

$$(1) \quad \|S_{\alpha,\beta} f\|_W \leq \|f\|_W \quad (f \in \mathcal{P})$$

$$(2) \quad |1 - \alpha\bar{\beta}|W > 0, \quad \max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq 1, \quad \text{更に inner 関数 } Q \text{ と実数値 } m\text{-可積分関数 } t \text{ が存在して}$$

$$\frac{1 - \alpha\bar{\beta}}{|1 - \alpha\bar{\beta}|} = Qe^{it}, \quad |1 - \alpha\bar{\beta}|We^{-it} \in (HS)(\left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}}\right|)$$

特に $\beta = 0$ のとき、条件 (2) は次の条件 (2') のように簡単になる。

$$(2') \quad W > 0, \quad |\alpha| \leq 1, \quad W \in (HS)(|\alpha|)$$

特に $\beta = 0$ かつ α が正定数のとき、この定理に Neuwirth-Newmann の定理を用いて Helson-Szegö の定理を直ちに導くことができる。

特に α, β が相異なる複素定数で $W \in (HS)$ のとき、 $L^2(W)$ における $S_{\alpha,\beta}$ の作用素ノルム M と P_+ の作用素ノルム N の間には

$$\alpha' = \frac{\alpha}{M}, \quad \beta' = \frac{\beta}{M} \quad \text{のとき} \quad \left| \frac{\alpha' - \beta'}{1 - \alpha'\bar{\beta}'} \right| = \frac{1}{N}$$

という関係があることが、この定理より導かれる。この定理は $S_{\alpha,\beta}$ の $L^2(W)$ 上の作用素ノルムが 1 以下であるための条件を精密に調べている。そうすることで、この定理は Helson-Szegö の定理や Koosis の定理の他に Gohberg-Krupnik や Feldman-Krupnik-Marcus が得た作用素ノルムの評価の結果の一部分も含めてリフレッシュしたものになっている。

この定理の条件 (1) の不等号 $\leq$ を逆向きの不等号 $\geq$ に書き換えた条件は、条件 (2) の $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq 1$ を $\min\{|\alpha|, |\beta|\} \geq 1$ に書き換えた条件と同値である。この

同値性により、 $S_{\alpha,\beta}$ が $L^2(W)$ において下に有界な条件や、その可逆性を調べることができる。この同値性は、Helson-Szegö の定理の他に Widom-Devinatz-Rochberg の定理の $L^2(W)$ の場合も含めてリフレッシュしたものになっている。

学位論文審査の要旨

主査	教授	中路貴彦
副査	教授	井上純治
副査	教授	岸本品孝
副査	教授	林実樹廣
副査	助教授	高橋勝利

学位論文題名

Boundedness and invertibility of some singular integral operators

(ある特異積分作用素の有界性と可逆性)

単位円周 T 上のルベーク空間を $L^p = L^p(m)$ かつルベーク測度を $dm(e^{it}) = dt/2\pi$ で表わす。関数 $f \in L^1$ の特異積分 Sf を

$$Sf(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (a.e. \zeta \in T)$$

とする。 $P_+ = (I + S)/2$ かつ $P_- = (I - S)/2$ とすると、 $\alpha, \beta \in L^\infty$ に対して $S_{\alpha\beta} = \alpha P_+ + \beta P_- = 2^{-1}(\alpha + \beta)I + 2^{-1}(\alpha - \beta)S$ とするとき、これは表題の singular integral operator である。本論文では、非負関数 $W \in L^1$ による重みつきルベーク空間 $L^2(W)$ 上での singular integral operator $S_{\alpha\beta}$ の有界性と可逆性を研究している。

$S_{\alpha\beta}$ の可逆性がさかんに研究されるようになったのは、やはり Riemann-Hilbert の問題からである。これは重みのない時、すなわち $W \equiv 1$ のときに、与えられた $g \in L^2$ に対して $\alpha f_+ + \beta f_- = g$ となる解析関数の境界値 f_+ と f_- を見つける問題である。 $S_{\alpha\beta}$ の有界性は $\alpha = -\beta = 1$, すなわち $S_{\alpha\beta} = S$ のとき または $\alpha = 1, \beta = 0$, すなわち $S_{\alpha\beta} = P_+$ のときの Helson-Szegő の研究からである。これは S が有界である重み W を決定したものである。これ以後、 S または一般の $S_{\alpha\beta}$ の有界性の様々な研究がある。申請者は $S_{\alpha\beta}$ の有界性と可逆性について、完全に一般的な必要かつ十分条件を得ている。

さて学位論文の審査の詳細を述べることにする。 S が有界となる重み W の族は (HS) と書かれるが、その要素は現在広く Helson-Szegő 測度といわれている。 $W \in (HS)$ の対数 $\log W$ は BMO に属することにより、多くの数学者の注目を集めてきたが、BMO との深いかわりはまだよくわかっていない。申請者は、Cotlar-Sadosky の lifting 定理と Hilbert 空間における議論を用いて、一般的 $S_{\alpha\beta}$ の $L^2(W)$ における作用素ノルムが 1 以下であるための W の必要十分条件を与えた。そのために、彼は (HS) にかわる重みの族 $(HS)(r)$ を導入した。非負関数 r について、 $W \in (HS)(r)$ とは

$$W = Ce^{u+\bar{v}}, r^2 e^u + e^{-u} \leq 2 \cos v, |v| \leq \pi/2$$

を満たす非負定数 C と実数値関数 $u, v \in L^1$ が存在することである。ここで $\bar{v}$ は v の共役調和関数を示す。

$\alpha, \beta \in L^\infty$ が $|1 - \alpha\bar{\beta}| > 0$ を満たしているとき、可測関数 $r_{\alpha\beta}$ を $r_{\alpha\beta} = |\alpha - \beta|/|1 - \alpha\bar{\beta}|$ で定める。申請者は $S_{\alpha\beta}$ の有界性について次の定理を証明した。

定理 $\alpha, \beta \in L^\infty$ と非負値関数 $W \in L^1$ が $(\alpha - \beta)W \neq 0$ を満たしているとき、次の条件は互いに同値である。

(1) $L^2(W)$ における $S_{\alpha\beta}$ の作用素ノルムは1以下である。すなわち

$$\|S_{\alpha\beta}f\|_W \leq \|f\|_W \quad (f \in \mathcal{P})$$

(2) $|1 - \alpha\bar{\beta}|W > 0$, $\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq 1$, 更に inner 関数 Q と実数値関数 $t \in L^1$ が存在して、

$$\frac{1 - \alpha\bar{\beta}}{|1 - \alpha\bar{\beta}|} = Qe^{it}, |1 - \alpha\bar{\beta}|We^{-t} \in (HS)(r_{\alpha\beta})$$

である。

この定理を Nakazi-Yamamoto は、強い仮定、 $(1 - \alpha\bar{\beta})/|1 - \alpha\bar{\beta}| = e^{is}$ かつ $|1 - \alpha\bar{\beta}|We^s \in L^1$ のもとで証明した。このときは、仮定があるので (2) は $|1 - \alpha\bar{\beta}|We^{-t} \in (HS)(r_{\alpha\beta})$ に相当するもののみが現われていた。申請者は条件なしに定理を証明するために、 $(1 - \alpha\bar{\beta})/|1 - \alpha\bar{\beta}|$ まで含めた上の (2) を考案した。またこれは Nakazi-Yamamoto の (2) とは、思想的には異なり、 $(HS)(r)$ を導入することにより表現をいちぢるしく簡単にしたことは重要である。また $\alpha = 1, \beta = -1$ や $\alpha = 1, \beta = 0$ のときは S や P_+ の作用素ノルムが1以下である必要十分条件を与えているが、これは Cotlar-Sadosky の定理を与えている。これはもちろん Helson-Szegö の定理を精密化している。 α と β が定数のときは、 $\|S_{\alpha\beta}\|_W$ と $\|P_+\|_W$ との間の新しい関係式を与えているが、これは Gohberg-Krupnik や Feldman-Krupnik-Marcus の結果の一部分と同値である。 $\alpha \in L^\infty$ かつ $\beta = 0$ のときは、定理の (2) は $W > 0, |\alpha| \leq 1, W \in (HS)(|\alpha|)$ となる。これは P_+ について Koosis のよく知られた定理をリフレッシュし、深めている。

$S_{\alpha\beta}$ の $L^2(W)$ での可逆性については、重み W のないときには、Widom-Devinatz により、Helson-Szegö の定理を用いて証明された。重み W が (HS) に属するときには、Rochberg により証明された。申請者は再び Cotlar-Sadosky の lifting 定理と Hilbert 空間における議論を用いて、一般の重み W の場合に、 $S_{\alpha\beta}$ の左逆作用素のノルムが1以下であるための必要かつ十分条件を、 $(HS)(r)$ を用いて与えた。それは上の定理と同様に証明されるが、Widom-Devinatz-Rochberg の定理を含んでいる。しかし Widom 等の定理は、 $(1 - \alpha\bar{\beta})/|1 - \alpha\bar{\beta}|$ を用いてではなく、 $(\alpha\bar{\beta})/|\alpha\bar{\beta}|$ を用いて (2) を表現している。定理 B は全く一般的な結果であるが、可能ならば $(\alpha\bar{\beta})/|\alpha\bar{\beta}|$ を用いて (2) を表現したいが、それはまだ未解決である。

以上の申請者の研究は、特異積分作用素 $S_{\alpha\beta}$ について、有界性と可逆性の両方の研究において、ある意味で最終的な重要な結果を得たもので、博士（理学）の学位を得るにふさわしいものである。