博士（理学） 高 村 博 之

学 位 論 文 題 名

Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations

（半線形波動方程式の大域解の非存在）

学位論文内容の要旨

本論文は単独の半線形波動方程式に対する初期値問題を研究したものである。 その目的は、任意の小さな初期値に対してどこまで時間大域的に解が存在するかという一般論に対して、解の非存在という逆の立場からある種の枠組みを作ることにある。 その枠とは非線形性の強弱であったり、初期値の無限遠方での挙動であったりする。 解は古典解を考える。

一般論は大きな初期値に対して作れないことがわかっているので、ここでは初期値は十分小さいと考える。 一般論では $\Box u \equiv \partial_t^2 u - \Delta u = F(u, Du)$ という形を扱っている。 ここで D は時空間の微分で、F は滑らかな非線形項で多項式のオーダーをもつものとする。

これに対する反例を作るのが目的であるから、ここでは方程式の物理的意味などは一切考えないことにした。 本論文では扱う方程式を一般論との対応を考慮に入れて $\Box u = |u|^p$ と $\Box u = |u_t|^p$ という特殊な形のものに限った。 ここで $p > 1$ とする。

第1章では前半で最新の一般論の紹介を行い、後半でこれらの特殊な方程式の歴史を述べている。 具体的には次のような予想を立てている。 まず初期値の台がコンパクトの場合を考える。 このとき時間大域解が、$1 < p \leq p_0(n)$ ならばある正の初期値に対しては非存在、$p > p_0(n)$ ならば任意の初期値に対して存在するというような $p_0(n)$ がある。 ここで n は空間の次元を表している。 これはそれぞれの方程式について具体的に書くことができる。 もちろんこの予想は一般論と整合している。 次に初期値の台がコンパクトでない場合を考える。 台のコンパクト性を取り除くことは、解の漸近挙動の調査や散乱理論への応用などで重要である。 このときコンパクトのときの存在の場合である $p > p_0(n)$ のと

きでも、初期値の無限遠方での減衰が悪いと非存在になってしまうことがある。 以上の予想を定式化して、以下の各章で詳しく解析している。

第２章は波動方程式の基本解に対する各点評価の準備に充てている。 一般論では L^2-理論のおかげで空間の次元が高くても苦にはならない。 しかしここで扱う方程式は非線形項の可微分性が低く、一般論の最大の武器であるエネルギー法が使えない。 そこで基本解の各点評価を用いて解析することになる。 基本解は空間の次元が４以上になった途端に複雑になる。 具体的には正値性がなくなるのである。 解の爆発を証明するためには正値性は不可欠である。 ここでは時空間の一部分を取り出してそれをうまく解決している。

第３章では台がコンパクトである場合の非存在をすべての次元で証明している。 ただし $\Box u = |u|^p$ については $p = p_0(n)$ の $n \geq 4$ の場合は残したままになっている。 ３．１節は $\Box u = |u|^p$ の $n = 2,\ 3$ のときの非存在をより詳しく、解の lifespan の上からの評価も含めて証明している。 lifespan とは解の存在する最大時間 T のことである。 具体的には、初期値に小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を付けて $u(x,0) = \varepsilon\varphi(x)$, $u_t(x,0) = \varepsilon\phi(x)$ とし $T = T(\varepsilon)$ とする。 時間大域解の非存在とは $T(\varepsilon) < +\infty$ のことである。 この節ではさらに $1 < p < p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)}$、$p = p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)})$ ということを示している。 ここで C は ε に無関係な正定数である。 $\gamma(p,n) = 2+(n+1)p-(n-1)p^2$ で、このときの $p_0(n)$ は $\gamma(p,n) = 0$ の正根であることに注意する。 興味深いのは時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることである。 ３．２節は $\Box u = |u|^p$ の $1 < p < p_0(n)$ の場合の非存在をすべての n に対して示している。 ３．３節は $\Box u = |u_t|^p$ の $1 < p \leq p_0(n)$ の場合の非存在と lifespan の評価をすべての n に対して示している。 具体的には $1 < p < p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/(1-(n-1)(p-1)/2)}$、$p = p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-(p-1)})$ ということを示している。 この場合は $p_0(n) = (n+1)/(n-1)$ であることに注意する。 このときも時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることが一部の場合はわかっている。 この章で証明している結果の中には知られている古いものも含まれているが、証明は遥かに簡略化してあり統一的である。

第４章は本論文の中核をなす部分で、台がコンパクトでない場合の解の非存在をすべての次元に渡って証明している。 まず前提として台がコンパクトときで存在する場合である

$p > p_0(n)$ を仮定する。 このとき次のような初期値の遠方での減衰の臨界値 κ_0 の存在が予想されている。 $|x| \to \infty$ のとき $\nabla_x^\alpha \varphi(x)$, $\nabla_x^\beta \psi(x) = O(|x|^{-\kappa})$ ここで α, β は $\beta = 0$ を含む適当な多重指数で、$\kappa \geq \kappa_0$ ならば $T(\varepsilon) = +\infty$ となる。 反対に $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \geq M/(1+|x|)^\kappa$ ここで $M > 0$, $0 < \kappa < \kappa_0$ ならば $T(\varepsilon) < +\infty$ となる。 さらにこのとき評価 $T(\varepsilon) < C\varepsilon^{-(\kappa_0-\kappa)^{-1}}$ が成立する。 時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることが一部の場合にはわかっている。 この臨界値 κ_0 は $|u|^p$ に対しては $(p+1)/(p-1)$ で、$|u_t|^p$ に対しては $1/(p-1)$ である。 これは方程式のスケール変換に対する不変性に関係している。 つまり $u(x,t)$ が方程式を満たしているならば、$u_R(x,t) = R^{\kappa_0 - 1}u(Rx, Rt)$, $R > 0$ も方程式を満たしているというものである。 以上は $n = 2$, 3 のときには第 2 章で述べた理由によってある程度わかっていた。 この章では基本解の正値性をうまく引き出すことによって、上の非存在の部分をすべての次元に対して証明することに成功した。

以上の本論文の解析によって、小さな初期値に対する時間大域解の存在の一般論に対して初期値の無限遠方での挙動の制限を明確にしたことになった。 この点では当初の目的は十分達成されたと言える。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　上　見　練太郎
副　査　　教　授　　久保田　幸　次
副　査　　教　授　　儀　我　美　一
副　査　　教　授　　小　澤　　　徹

学位論文題名

Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations

（半線形波動方程式の大域解の非存在）

本論文は単独の半線形波動方程式に対する初期値問題を研究したものである。 その目的は、任意の小さな初期値に対してどこまで時間大域的に解が存在するかという一般論に対して、解の非存在という逆の立場からある種の枠組みを作ることにある。 その枠とは非線形性の強弱であったり、初期値の無限遠方での挙動であったりする。 解は古典解を考える。

一般論は大きな初期値に対して作れないことがわかっているので、ここでは初期値は十分小さいと考える。 一般論では $\Box u \equiv \partial_t^2 u - \Delta u = F(u, Du)$ という形を扱っている。 ここで D は時空間の微分で、F は滑らかな非線形項で多項式のオーダーをもつものとする。

これに対する反例を作るのが目的であるから、ここでは方程式の物理的意味などは一切考えないことにした。 本論文では扱う方程式を一般論との対応を考慮に入れて $\Box u = |u|^p$ と $\Box u = |u_t|^p$ という特殊な形のものに限った。 ここで $p > 1$ とする。

第１章では前半で最新の一般論の紹介を行い、後半でこれらの特殊な方程式の歴史を述べている。 具体的には次のような予想を立てている。 まず初期値の台がコンパクトの場合を考える。 このとき時間大域解が、$1 < p \leq p_0(n)$ ならばある正の初期値に対しては非存在、$p > p_0(n)$ ならば任意の初期値に対して存在するというような $p_0(n)$ がある。 ここで n は空間の次元を表している。 これはそれぞれの方程式について具体的に書くことができる。 もちろんこの予想は一般論と整合している。 次に初期値の台がコンパクトでない場合を考える。 台のコンパクト性を取り除くことは、解の漸近挙動の調査や散乱理論への応用などで重要である。 このときコンパクトのときの存在の場合である $p > p_0(n)$ のときでも、初期値の無限遠方での減衰が悪いと非存在になってしまうことがある。 以上の予想を定式化して、各章で詳しく解析している。

第２章は波動方程式の基本解に対する各点評価の準備に充てている。

第３章では台がコンパクトである場合の非存在をすべての次元で証明している。 ただし $\Box u = |u|^p$ については $p = p_0(n)$ の $n \geq 4$ の場合は残したままになっている。 ３．１節は $\Box u = |u|^p$ の $n = 2, 3$ のときの非存在をより詳しく、解の lifespan の上からの評価も含めて証明している。 lifespan とは解の存在する最大時間 T のことである。 具体的には、初期値に小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を付けて $u(x,0) = \varepsilon\varphi(x)$, $u_t(x,0) = \varepsilon\phi(x)$ とし $T = T(\varepsilon)$ とする。 時間大域解の非存在とは $T(\varepsilon) < +\infty$ のことである。 この節ではさらに $1 < p < p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,n)}$、$p = p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)})$ ということを示している。 ここで C は ε に無関係な正定数である。 $\gamma(p,n) = 2+(n+1)p-(n-1)p^2$ で、このときの $p_0(n)$ は $\gamma(p,n) = 0$ の正根であることに注意する。 興味深いのは時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることである。 ３．２節は $\Box u = |u|^p$ の $1 < p < p_0(n)$ の場合の非存在をすべての n に対して示している。 ３．３節は $\Box u = |u_t|^p$ の $1 < p \leq p_0(n)$ の場合の非存在と lifespan の評価をすべての n に対して示している。 具体的には $1 < p < p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/(1-(n-1)(p-1)/2)}$、$p = p_0(n)$ のとき $T(\varepsilon) \leq \exp(C\varepsilon^{-(p-1)})$ ということを示している。 この場合は $p_0(n) = (n+1)/(n-1)$ であることに注意する。 このときも時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることが一部の場合はわかっている。 この章で証明している結果の中には知られている古いものも含まれているが、証明は遥かに簡略化してあり統一的である。

第４章は本論文の中核をなす部分で、台がコンパクトでない場合の解の非存在をすべての次元に渡って証明している。 まず前提として台がコンパクトときで存在する場合である $p > p_0(n)$ を仮定する。 このとき次のような初期値の遠方での減衰の臨界値 κ_0 の存在が予想されている。 $|x| \to \infty$ のとき $\nabla_x^\alpha\varphi(x)$, $\nabla_x^\beta\psi(x) = O(|x|^{-\kappa})$ ここで α, β は $\beta = 0$ を含む適当な多重指数で、$\kappa \geq \kappa_0$ ならば $T(\varepsilon) = +\infty$ となる。 反対に $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \geq M/(1+|x|)^\kappa$ ここで $M > 0$, $0 < \kappa < \kappa_0$ ならば $T(\varepsilon) < +\infty$ となる。 さらにこのとき評価 $T(\varepsilon) < C\varepsilon^{-(\kappa_0-\kappa)^{-1}}$ が成立する。 時間局所解の存在によって $T(\varepsilon)$ は下からも同じ ε のオーダーで評価されていることが一部の場合にはわかっている。 この臨界値 κ_0 は $|u|^p$ に対しては $(p+1)/(p-1)$ で、$|u_t|^p$ に対しては $1/(p-1)$ である。 これは方程式のスケール変換に対する不変性に関係している。 以上は $n = 2, 3$ のときには基本解の単純さによってある程度わかっていた。 この章では基本解の正値性をうまく引き出すことによって、上の非存在の部分をすべての次元に対して証明することに成功した。

以上の本論文の解析によって、小さな初期値に対する時間大域解の存在の一般論に対して初期値の無限遠方での挙動の制限を明確にしたことになった。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。