学位論文題名

On SK Groups of Manifolds

(多様体の SK 群について)

学位論文内容の要旨

コンパクト可微分多様体(以下単に多様体)を分類する一つの手段として Karras-Kreck-Neumann-Ossa は閉多様体の集合に cutting and pasting(Schneiden und Kleben) 操作により SK-同値と呼ばれる同値関係を定義し, これから SK-群と呼ばれる加群を導入した。彼らは, この群がコボルディズム群と深い関係があることを示した。本論文第1章ではこの群について新たに得られた結果を述べ, さらに第2章ではこの群の定義を境界を持つ多様体に拡張しそこから得られた事柄を述べた。

向きづけられた多様体の SK 群を有向 SK 群, そうでない場合を非有向 SK 群とよぶことにする。 n 次元多様体 M と M から位相空間 X への連続写像 f の組からなる特異多様体 $(M; f)$ の SK 群を $SK_n(X)$ と表す。有向 SK 群 $SK_n(X)$ の構造は X が一点 $\{pt\}$ の場合は分かっており, さらに X が単連結位相空間ならば $SK_n(X)$ が $SK_n(pt)$ (これを単に SK_n と表す) と同型であることが $n = 4, 6$ 以外はすでに知られている。第1章§2では $n = 4, 6$ も含めて両者は同型となることを示した。

定理 1. X が単連結な位相空間ならば有向 SK 群について $SK_n(X) \cong SK_n$ がすべての n について成り立つ。

次に一般に多様体の直積を考えることにより次数つき環 $SK_* = \sum_{n \geq 0} SK_n$ が得られる。また次数つき SK_* 加群 $SK_*(X) = \sum_{n \geq 0} SK_n(X)$ も同様に考えられる。これについては C.Kosniowski により非有向 SK 環 SK_* の構造が示されている。§3では有向 SK 環の場合その環構造に関して次の結果を示した。

定理 2.

$$SK_* \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][[S^2], [CP^2]]/\vartheta$$

が成立する。ここで ϑ は $[S^2][CP^2]^k - \frac{3^k}{2^{2k}}[S^2]^{2k+1}$ ($k \geq 1$) なる元より生成されるイデアルである。ただし S^2 は 2次元球面, CP^2 は 2次元複素射影平面である。

多様体に有限アーベル群 G が作用している場合に C.Kosniowski により非有向特異閉 G 多様体の同変 SK 群 SK_*^G が研究され Burnside 環 $A(G)$ との密接な関連性が提起された。このことに関して $G = \mathbb{Z}_2$ の場合について §4, §5 でより詳しく考察した。以下, やはり $SK_*^{\mathbb{Z}_2}(pt) = SK_*^{\mathbb{Z}_2}$ と表す。今 $y = [Z_2] \in SK_0^{\mathbb{Z}_2}$, $y_i = [RP(R \times \tilde{R}^i)] \in SK_i^{\mathbb{Z}_2}$ ($i \geq 0$), $\alpha = [RP^2] \in SK_2$ とおき, $A_1 = \alpha y_0 - y_0$, $B_1 = \alpha y - y$, $C_1 = y_1 - 2y_0 + y$, $D_1 = y_2 - y_0$, $E_1 = y_3 - y_1$ とする。ここで $[Z_2]$ は $\mathbb{Z}_2$ を 0次元多様体とみなし, $\tilde{R}$ は対合の作用を -1 倍とした実数全体の集合を意味する。これら α, y, y_i の間の積の関係式を調べ SK_* 代数としての $SK_*^{\mathbb{Z}_2}$ を求

め Burnside 環との関係として次の結果を得た。

定理 3. S を A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 で生成される $SK_*^{Z_2}$ の SK_* 部分代数とする。このとき次の単完全系列は環として分解する:

$$0 \rightarrow S \hookrightarrow SK_*^{Z_2} \xrightarrow{\phi} A(\mathbb{Z}_2) \rightarrow 0.$$

ここに i は包含写像, ϕ は自然な準同型写像である。

第 2 章では位相空間対 (X, A) に関する境界をもつ特異多様体 $(M, \partial M; f)$ の SK 群 $SK_n(X, A)$ の定義をし幾つかの結果を述べた。 SK_n は自然に位相空間対のホモトピー圏から Abel 群の圏への共変関手となるが一般ホモロジー公理は満たさない。 $SK_n(X, A)$ については次の結果を得た (§ 2)。

定理 4. 弧状連結な位相空間対 (X, A) ($A \neq \emptyset$) に対して有向, 非有向を問わず $SK_n(X, A) \neq 0$ ($\forall n \geq 0$) が成り立つ。特に有向 SK 群については $SK_0(X, A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $SK_1(X, A) \cong \mathbb{Z}$, 非有向 SK 群については $SK_0(X, A) \cong SK_1(X, A) \cong \mathbb{Z}$ である。

また $(X, A) = (pt, pt)$ の場合境界を持つ多様体の手術理論を用いることにより次が成り立つ (§ 4)。ここからはもっぱら非有向 SK 群についての結果である。

定理 5. $SK_n(pt, pt) \cong \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) が成り立ち, その生成元は n 次元球体 $[D^n, S^{n-1}]$ である。

$SK_n(X)$ をコボルディズム関係で類別したものを $\overline{SK}_n(X)$ とおき, $I_n(X)$ を自然な射影 $p: SK_n(X) \rightarrow \overline{SK}_n(X)$ の核とすると

定理 6. $n \geq 1$ と弧状連結な位相空間対 (X, A) に対して

$$0 \rightarrow SK_n(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{i \otimes (id)} SK_n(X, A) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{j \otimes (id)} I_{n-1}(A) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow 0$$

は分解する完全系列となる,

ここに $i([M]) = [M, \emptyset]$, $j([M, \partial M]) = [\partial M]$ で, id は恒等写像である。

§ 5, § 6 では上記の事柄を境界付き G 多様体の場合に考えた。今, この群を $SK_n^G(X, A)$ と表す。ただし G は一般にコンパクト Lie 群とする。

定理 7. 任意の G 位相空間対 (X, A) と $n \geq 1$ に対して

$$0 \rightarrow SK_n^G(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{i \otimes (id)} SK_n^G(X, A) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{\partial \otimes (id)} SK_{n-1}^G(A) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow 0$$

は分解する完全系列となる,

ここに $i([M]) = [M, \emptyset]$, $\partial([M, \partial M]) = [\partial M]$ で id は恒等写像である。

特に G を単位元だけからなる群とすれば前述の群 $SK_*(-, -)$ と一致し定理 6 と定理 7 より弧状連結空間に対し次が得られる。

命題 8. $SK_*(X) \cong SK_*(pt) \oplus 2\text{-torsion}$, $SK_*(X, A) \cong SK_*(pt, pt) \oplus 2\text{-torsion}$ 。

$G = \mathbb{Z}_2$ の場合, 対合をもつ閉多様体の SK 同値類はそのオイラー標数と不動点集合のオイラー標数により定まる。一方境界を持つ多様体 $(M, \partial M)$ についてはオイラー標数 $\chi(M, \partial M)$, $\chi(F_i, \partial F_i)$ が考えられるが, これらも SK^{Z_2} 不変量となる。ここで F_i は余次元 i の不動点集合である。この逆については次が成り立つ。

定理 9. 対合をもつ多様体 $(M, \partial M)$ と $(M', \partial M')$ が $\chi(M, \partial M) = \chi(M', \partial M')$ かつ $\chi(F_i, \partial F_i) = \chi(F'_i, \partial F'_i)$ ($i \geq 0$) ならば $(M, \partial M)$ は位数 2 の元を法として $(M', \partial M')$ と SK^{Z_2} 同値である。

$SK_*^{Z_2}(pt, pt)$ にも, 多様体の直積により自然に積が定義できる。今定理 3 の前に記した生成元をもとに $SK_*^{Z_2}(pt, pt)$ の元 $\bar{y} = y \times I$, $\bar{y}_i = y_i \times I$ を考える。ここで $I = [0, 1]$ でその上

の作用は自明なものとする。このとき定理 7 より $SK_*^{Z_2}(pt, pt) \otimes Z[\frac{1}{2}]$ は $\{y, \bar{y}, y_i, \bar{y}_i; i \geq 0\}$ で生成される自由 $SK_*(pt) \otimes Z[\frac{1}{2}]$ 加群と成ることが分かり, それらの積の関係式も得られた。

学位論文審査の要旨

主査 教授 諏訪 立雄

副査 教授 山口 佳三

副査 教授 泉屋 周一

副査 教授 川久保 勝夫(大阪大学大学院理学研究科)

学位論文題名

On SK Groups of Manifolds

(多様体の SK 群について)

可微分多様体の分類問題は微分位相幾何学 (トポロジー) に於ける基本的問題である。このための手段として U.Karras, M.Kreck, W.D.Neumann 及び E.Ossa は閉多様体 (境界のない多様体) の集合に cutting and pasting (Schneiden und Kleben) 操作により SK-同値と呼ばれる同値関係を定義し、これから SK-群と呼ばれる加群を導入し、この問題の解決に新しい道を切り開いた。本論文ではこの群について新たに得られた結果を述べると共に、さらに未だ未開拓であった、境界を持つ多様体の場合にこの群の定義を拡張しそこから得られた事柄が述べられている。

向きづけられた多様体の SK 群を有向 SK 群, そうでない場合を非有向 SK 群とよぶことにする。 n 次元多様体 M と M から位相空間 X への連続写像 f の組からなる特異多様体 $(M; f)$ の SK 群を $SK_n(X)$ と表す。有向 SK 群 $SK_n(X)$ の構造は X が一点 $\{pt\}$ の場合は分かっており、さらに X が単連結位相空間ならば $SK_n(X)$ が $SK_n(pt)$ (これを単に SK_n と表す) と同型であることが $n = 4, 6$ 以外はすでに知られていた。本論文では $n = 4, 6$ も含めすべての n について両者は同型となることが示されている。

次に一般に多様体の直積を考えることにより次数つき環 $SK_* = \sum_{n \geq 0} SK_n$ が得られる。また次数つき SK_* 加群 $SK_*(X) = \sum_{n \geq 0} SK_n(X)$ も同様に考えられる。これについては C.Kosniowski により非有向 SK 環 SK_* の構造が示されている。本論文では有向 SK 環の場合その環構造が完全に決定されている。

多様体に有限アーベル群 G が作用している場合に C.Kosniowski により非有向特異閉 G 多様体の同変 SK 群 SK_n^G が研究され Burnside 環 $A(G)$ との密接な関連性が提起された。このことに関して $G = \mathbf{Z}_2$ の場合について詳しく考察され、Burnside 環との関係も明らかにされている。

本論文第 2 章では位相空間対 (X, A) に関しての境界をもつ特異多様体 $(M, \partial M; f)$ の SK 群 $SK_n(X, A)$ の定義が新たに導入され、幾つかの結果が述べられている。 SK_n は自然に位相空間対のホモトピー圏から Abel 群の圏への共変関手となるが一般ホモロジー公理は満たさない。 $SK_n(X, A)$ の構造、及びコボルディズムとの関係について幾つかの基本的結果が得られている。

さらに、上記の事柄が境界付き G 多様体の場合に考察されている。ここで、 G はコンパクト Lie 群である。

$G = \mathbb{Z}_2$ の場合、対合をもつ閉多様体の SK 同値類はそのオイラー標数と不動点集合のオイラー標数により定まる。一方境界を持つ多様体 $(M, \partial M)$ についてはオイラー標数 $\chi(M, \partial M), \chi(F_i, \partial F_i)$ が考えられるが、これらも $SK^{\mathbb{Z}_2}$ 不変量となる。ここで F_i は余次元 i の不動点集合である。この逆については次が成り立つことが示されている。即ち、対合をもつ多様体 $(M, \partial M)$ と $(M', \partial M')$ が $\chi(M, \partial M) = \chi(M', \partial M')$ かつ $\chi(F_i, \partial F_i) = \chi(F'_i, \partial F'_i)$ ($i \geq 0$) ならば $(M, \partial M)$ は位数 2 の元を法として $(M', \partial M')$ と $SK^{\mathbb{Z}_2}$ 同値である。

これを要するに、著者は多様体の SK 群について多くの重要な新知見を得たものであり、微分位相幾何学の進展に貢献するところ大なるものがある。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。