

学位論文題名

Neutral Multi-Instantons and Large N Phase Transition in Two Dimensional QCD

(2次元 QCD における中性多重インスタントンと large N 相転移)

学位論文内容の要旨

QCD は強い相互作用を説明する基本的な枠組であり、これまで低エネルギー領域において解く数々の試みがなされてきた。なかでもストリング理論として記述は、それが QCD の最も重要な性質である閉じ込めを意味することから、解く鍵であると考えられている。この試みにたいし、近年大きな進展が低次元の模型においてなされた。特に Gross 等は 2 次元の $SU(N)$ or $U(N)$ Yang-Mills 理論がストリング理論と等価であることを示し、2 次元 QCD の研究は新たな相に入った感がある。一般に種数 G のリーマン面 Σ_G 上で定義された Yang-Mills 理論の分配関数は Migdal-Rusakov の指標展開により、次のようなゲージ群の既約表現の和にかけることが知られている。

$$Z = \sum_R (\dim R)^{2-2G} \exp\left(-\frac{\lambda A}{2N} C_2(R)\right).$$

ここで $\dim R, C_2(R)$ は 各々既約表現 R の次元、2 次カシミヤ演算子の値である。彼らはこれを $1/N$ で展開し直すことにより、irrelevant な項を除いて次の表式を得ている。

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} N^{n(2-2G)-b} e^{-\frac{\lambda}{2} n A} |\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_G \setminus \{q_1, \dots, q_b\}), S_n)| \frac{(\lambda A)^b}{b!}$$

この Homomorphism は b 個の分岐点と n 枚の sheet を持つ Σ_G の分岐被覆写像を表しており、上記の分配関数は target space が Σ_G でかつ折り重なるの禁止されたストリング理論と解釈できる。しかし球面上においては large N 極限で 3 次の相転移が発見され、弱結合相 ($\lambda A < (\lambda A)_c \equiv \pi^2$) ではストリング理論による記述は存在しない。この相転移は当初ランダム行列の方法により見い出され、物理的意味づけが明白ではなかったが、後に 2 つの観点から意味づけがなされている。強結合相からながめると相転移点は分岐点のエントロピーが支配的になる点としてとらえられる。つまりストリング和は相転移点を境に発散する。他方 弱結合相から見ると相転移は インスタントン が誘起すると考えられる。本論文ではこれまで不十分だったインスタントンによる相転移のシナリオを具体的に与えたので以下これを説明する。

Yang-Mills 理論の分配関数は 既約表現の和による表式の双対変換をとることにより インスタントンの和に書き直せる。また各々のインスタントンのまわりの揺らぎは、厳密にガウス型のエルミート行列模型 を変形した形で与えられる。これまで、その large N でのふ

るまいは 0 インスタントン および 1 インスタントン sector についてのみ得られていた。即ち、0 インスタントン sector は弱結合相での自由エネルギーの厳密な答を与え、1 インスタントンの振幅は $(\lambda A)_c$ を境にして弱結合領域では exp で減衰するが、強結合領域では振動する。これらより相転移は インスタントン により誘起されると言えるが、希薄ガス近似では自由エネルギーに対して $N^{-5/2}$ のオーダーの寄与しかないため、large N 相転移の説明として不十分である。従って強結合領域での多重インスタントンの効果が large N 相転移において本質的なものと考えられる。

多重インスタントンの振幅について large N でのふるまいはこれまで知られておらず、如何なるダイナミックスが存在するのか不明であった。我々は振幅に対する以下の積分表示を初めて与え、これにより large N での性質を明らかにした。

$$Z = Z_{\text{weak}} \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{N+1}} \frac{1}{1-z} e^{\sum_{j=1}^N \frac{(-)^{j-1}}{j} z^j \alpha_j},$$

$$\alpha_j \equiv \sum_{m_1, \dots, m_j \neq 0} \epsilon^{m_1 + \dots + m_j} \oint \frac{dt_1}{2\pi i} \dots \oint \frac{dt_j}{2\pi i} e^{-N(\tilde{\Phi}_{m_1}(t_1) + \dots + \tilde{\Phi}_{m_j}(t_j))} M_{12} M_{23} \dots M_{j1}$$

ここで α_j は connected な j -インスタントンの振幅であり、 $\epsilon = \pm 1$, $M_{ij} \equiv (\frac{m_i}{m_i}(1+t_j) - t_i)^{-1}$ である。また Wilson loop についても同様な積分表示が得られる。この積分表示は簡単なゲージ群のパラメーター (N) 依存性をもち、 $N = \infty$ では鞍点法が厳密になる。ただしいまの場合、鞍点自体は求まるが、積分表示のうち相互作用をしめす部分 $M_{12} M_{23} \dots M_{j1}$ に鞍点を代入した際、singularity を生ずるインスタントンの配位が存在するというのが重要である。そのうち最も singularity の強いインスタントンの配位は “neutral” な配位であり次のことが導かれる。

1. “neutral” な多重インスタントンの配位が large N 極限の強結合領域で支配的になる。但しここで “neutral” とは絶対値がすべて同じで、正の charge と負の charge のインスタントンの数が等しいことをいう。
2. インスタントン間の相互作用にある種の democracy が存在する。

1 についてはこれが相互作用からの帰結であり、2 次元の場の理論でよくみられる infra-red からの制限として得られるのではないことに注意されたい。2 は 2 体相互作用、4 体相互作用、.. がすべて同じオーダーであるという主張である。数学的に厳密に証明はされていないが、singularity の構造および 1 体から 4 体までの数値計算はこの主張を支持している。

また上の積分表示ををもちいて、finite N の場合の多重インスタントンの振幅、自由エネルギー、Wilson loop の数値計算を “neutral” な多重インスタントンの配位に truncate しておこない、large N の厳密解と比較した。結果は $A = 2\pi^2$ 程度まで非常によい一致を見たが、 $A > 2.5\pi^2$ においては finite N での値が振動し large N の厳密解との一致は見られない。これは強結合領域においてはインスタントン和がある種の漸近級数になっているためと考えられる。つまり、一般に何か非摂動的に関数 $S(z)$ が定義され、それがある漸近展開 $\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ を持つとすると、 $z = 0$ 近傍では級数を適当に truncate することにより真の値に近づけることができる。2 次元 QCD においても同様なことが “neutral” な多重インスタントンの truncation でおき、相転移点近傍で large N での解のふるまいを再現していると考えられる。

今後の課題としては、様々な物質場が結合した系の分析が重要であろう。この系では、近年主に light front QCD の立場からの分析が進んでおり、hadron spectrum 等のデータが蓄積されつつある。しかしこれとは別のアプローチとして Wilson loop のランダムウォー

クという立場があり、上で得た結果を直接投入できる。今後この立場からの分析が 2 次元 QCD の大局的構造を知るうえで重要となろう。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 石 川 健 三

副 査 教 授 河 本 昇

副 査 教 授 大 川 房 義

副 査 助教授 中 山 隆 一

学 位 論 文 題 名

Neutral Multi-Instantons and Large N Phase Transition in Two Dimensional QCD

(2次元 QCD における中性多重インスタントンと large N 相転移)

現代の素粒子物理学で基本粒子間の相互作用を記述している量子色力学(QCD)はSU(3)群に基づく非可換ゲージ理論である。SU(N)に基づくゲージ理論を時空2次元で解く様々な試みが為されてきた。2次元QCDは、クォークの閉じ込めを示す為、4次元QCDのモデルであり、さらに、幅広い現象を記述する場の理論でもある。内部自由度の数 N を大きくした時、この系は物理的性質の解明を易しくさせるが、一方で結合常数の変化と共に相転移を示す事がわかっていた。しかしながらその機構は、これまで不明のままであった。インスタントンの重要性等が指摘されていたが、インスタントンの計算は1-インスタントンや希薄インスタントン等の単純な場合を除きなされていず、相転移との関連も未知のままであった。

本論文は、このような現況にある2次元QCDについて、2次元SU(N)QCDの N が大きいときの振舞いを明かにすることを目的として研究し、インスタントンについての系統的な計算法をあたえと共にこの系の性質をあきらかにすることに成功した。特に、多重インスタントン配位の計算法を与え、それに基づきインスタントンにより相転移が起きていることを具体的に示した。新しく得られた多重インスタントンについての計算法は、強結合している多重インスタントンに適用出来るものである。これを使い、著者は分配関数、自由エネルギー、ウィルソンループ期待値等を求め、相転移がインスタントンによって引き起こされることを証明した。この結果、2次元SU(N)QCDの性質、とくに相転移機構、や相転移点近傍での振舞いが明かにされると共に、強結合している多重インスタントンの計算法や、その特徴が明かになった。

著者はまず、分配関数の指標表示に着目し、系統的な解析を可能とさせ、みとうの良き評価をした。特異な複素積分が現れるため、これは多変数関数ではかなり困難な事柄である。著者はこれをやり遂げ、さらに、特殊な多重インスタントン配位が分配関数に特に大きな寄与を与える事を初めてみいだした。この配位は、インスタントン数が同じ大きさで符号が逆であるインスタントン対の集まりであり、相転移点近傍では、この配位により物理量の期待値が決定される。著者はこれを、解析的な計算と数値的な計算との両方で示した。この結果この中性多重インスタントンが相転移を引き起こしていることが明らかになった。得られた結果は、大変興味深いものであり、ゲージ理論の理解や、インスタントンの理解、特に強結合インスタントンの理解に貢献する、高く評価されるものである。

これを要するに、著者は2次元QCDにおいて今まで未知であった多重インスタントン効

果の計算法を与え、特殊な中性多重イスタント配位の重要性を初めて見つけ、さらに相転移機構の解明を行うという新しい知見をえた。これらは、ゲージ理論の理解に大きく貢献するものである。

よって審査員一同は、著者が北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと、認める。