博士（理　学）　松　田　晃　一

学 位 論 文 題 名

A qualitative theory of similarity pseudogroups: analogs of the theorem of Hector and Duminy

（相似変換擬群の定性論:Hector−Duminy の定理のアナロジー）

学位論文内容の要旨

$\mathscr{G}$ を多様体上の余次元 q 葉層構造とする。$\mathscr{G}$ の各ホロノミー変換写像が R^q 上の局所相似変換となる時に、$\mathscr{G}$ は横断的相似葉層であるという。従って、$\mathscr{G}$ が横断的相似葉層であるならば、$\mathscr{G}$ のホロノミー変換写像達により、R^q 上の局所相似変換からなる $\mathscr{G}$ のホロノミー擬群が得られる。ホロノミー擬群は葉層の横断的な構造を記述しており、この擬群の作用を調べる事により、各葉の近傍さらにその葉自身の振る舞いを特徴付ける事が出来る。

$q=1$ である場合、横断的相似葉層は非常に研究され、特に、これらの葉層は横断的アファイン葉層と呼ばれている。実際、余次元 1 の C^2 級葉層構造の定性論は多くの人々によって研究されてきた。ここでいくつかの興味深い定理を思いだそう。$\mathscr{F}$ を C^∞ 級閉多様体 M 上の横断的に向き付け可能な余次元 1 の C^2 級葉層構造とする。$\mathscr{F}$ の葉 F が高々一方の側から自分自身に近付く時、半真であるという。F を $\mathscr{F}$ の、真でない半真葉とする、つまり、丁度一方の側(これを非真側という)から自分自身に近付く葉であるとする。この場合、F は例外型の局所極小集合 $\mathscr{M}$ に含まれる例外葉となることが知られている。このような F 及び $\mathscr{M}$ に対して、次にあげるいくつかの定理の一部は、古典的ではあるが、余次元 1 葉層の定性論においては重要な結果である。

(1) (Sacksteder) 局所極小集合 $\mathscr{M} \supset F$ は縮小写像をホロノミーとしてもつような葉を含む。

(2) (Hector-Duminy) F はその非真側に芽としての縮小写像をホロノミーとして持つ。

(3) (Cantwell-Conlon) 局所極小集合 $\mathscr{M} \supset F$ が Markov 型、つまり、そのホロノミーが記号力学系をモデルにしているような局所極小集合であるならば、$\mathscr{M}$ は高々有限枚の半真例外葉を含む。

(4) (稲葉) $\mathscr{F}$ を横断的区分線形な葉層とする。もし $\mathscr{F}$ がある C^2 葉層と位相共役ならば、局所極小集合 $\mathscr{M} \supset F$ は高々有限枚の半真例外葉を含む。

一方、$q \geq 2$ である場合、興味深い結果は未だに得られていない。これは葉の漸近的な振舞いが非常に複雑であるからである。例えば、極小集合のタイプでさえも、未だに完全には特徴付けられていないように思われる。

そこで、研究対象を制限するために、北海道大学の西森敏之氏は、余次元 q 横断的相似葉層を直接扱うかわりに、R^q の局所相似変換のなす擬群を扱い、その定性的な性質を調べる事

にし、さらに、余次元 1 の場合における "半真葉" (擬群の作用の言葉では "半真軌道") の概念の代替として、"bubbles を持つ軌道" という概念を導入した; Γ を R^q 内の有界凸開集合を定義域と値域に持つ相似変換のなす擬群とし、$x \in R^q$ を通る Γ の軌道 $\Gamma(x) = \{h(x) | h \in \Gamma\}$ を考える。この時 $\Gamma(x)$ の各元 $y \in \Gamma(x)$ に対して、空でない有界凸開集合 B_y (これを y での bubble という) が存在して次の三条件を満たす時、$\Gamma(x)$ は bubbles $\{B_y\}_{y \in \Gamma(x)}$ を持つという; (a) y は B_y の境界に含まれる。(b) $y_1, y_2 \in \Gamma(x)$ $(y_1 \neq y_2)$ ならば $B_{y_1} \cap B_{y_2} = \emptyset$。(c) $h \in \Gamma$ に対し、h は実解析的であるため、h の R^q 全体への拡張は一意に決まるが、これを $\bar{h}$ と書いた時、$y \in \Gamma(x)$ に対し、$\bar{h}(B_y) = B_{h(y)}$。

以下、Γ を R^q の局所相似変換のなす擬群とし、$x \in R^q$ の軌道 $\Gamma(x)$ が bubbles $\{B_y\}_{y \in \Gamma(x)}$ を持つとする。このような状況設定の元で、西森氏は、次の形で、(1) の Sacksteder の定理が相似変換の場合に成り立つ事を示した; Γ の元 g および $\Gamma(x)$ の閉包に含まれる点 z で、$g(z) = z$ かつ g が z への縮小写像であるものが存在する。

ここでは、この設定の元で、bubbles を持つ軌道の定性的な性質の研究を続ける。特に、余次元 1 の場合における、上にあげた Hector-Duminy の定理、Cantwell-Conlon-稲葉の定理のアナロジーについて考察を行った。

Hector-Duminy の定理については、Hector が余次元 1 で実解析的 (C^ω 級) な場合に行った証明があるため、この議論を相似変換の場合に移行させ、「Γ の元 g で、$g(x) = x$ かつ g が恒等写像でないものが存在する」事を明らかにした。

これにより、恒等写像以外の物が存在する事は分かったのではあるが、x を中心とする回転の可能性は排除できない。これは 1 次元 (余次元 1) で C^ω 級の場合においては、恒等写像でないもの存在を示しており、これはすなわち (それ自身もしくはその逆写像が) 縮小写像になってしまうためである。そこで、この議論で縮小写像の存在を示すには、限界があるように思われた。

そこで、Γ の作用及び x でのホロノミーの生成元の記述及びそれらの共通定義域の存在についての考察と特徴づけを行う事により、「Γ の元 g で、$g(x) = x$ かつ g が縮小写像 (つまり g の相似比が 1 未満) となるものが存在する」事を導き出す事ができた。また、ここでの議論により、(3) の Cantwell-Conlon の定理、(4) の稲葉の定理に関しては、「軌道 $\Gamma(x)$ の閉包が含む軌道で bubbles を持つものは有限個」という形で示す事ができた。

ホロノミーとして縮小写像の存在は分かったのであるが、回転するホロノミーも存在しうる。従って、回転するホロノミーの性質を明らかにする事も重要に思われる。回転の作用の性質を解き明かす為の一つとして、その不動点集合がどうなっているか調べる事は有効な事であろう。しかし一般に $q \geq 3$ の場合、回転の不動点集合は離散集合ではなくなってしまうことがある。そのため、その不動点集合の中における Γ-軌道の分布状況を調べる必要が出てくるが、これを各次元について考察するのは難しく思われる。

そこで、ここでは、2 次元、つまり、Γ が R^2 の局所相似変換のなす擬群である場合に限って考察を行う事にした。これは、$q = 2$ の場合の回転は、1 点のみを固定する (つまり、この点を中心とする回転となる) ため、扱いやすいからである。この状況のもとでは、「y を軌道 $\Gamma(x)$ の閉包に含まれる点、$g \in \Gamma$ を $g(x) = x$ をみたす x における回転写像であるとすると、ある n が存在して g^n は恒等写像になる。つまり、ホロノミー写像が回転であれば、それは、有限位数 (有限回の合成をとることにより、恒等写像) となる」事を明らかにした。また、さらに、「軌道 $\Gamma(x)$ のホロノミーはコンパクトな台を持つ」つまり、軌道 $\Gamma(x)$ の十分大きなコンパクト集合の外で、ホロノミーを考えた場合、それは全て恒等写像となっていることを明らかにした。

学位論文審査の要旨

主 査　教 授　西 森 敏 之
副 査　教 授　諏 訪 立 雄
副 査　教 授　泉 屋 周 一
副 査　助教授　森 吉 仁 志

学 位 論 文 題 名

A qualitative theory of similarity pseudogroups: analogs of the theorem of Hector and Duminy

(相似変換擬群の定性論:Hector−Duminy の定理のアナロジー)

$\mathcal{G}$ を多様体上の余次元 q 葉層構造とする。$\mathcal{G}$ の各ホロノミー変換写像が R^q 上の局所相似変換となる時に、$\mathcal{G}$ は横断的相似葉層であるという。$q=1$ である場合、特に横断的アファイン葉層と呼ばれ、余次元 1 の C^2 級葉層構造の定性論の研究対象の一つとして、多くの人々によって研究されている。$\mathcal{F}$ を C^∞ 級閉多様体 M 上の横断的に向き付け可能な余次元 1 の C^2 級葉層構造とする。$\mathcal{F}$ の葉 F が高々一方の側から自分自身に近付く時、半真であるという。F を $\mathcal{F}$ の、真でない半真葉とすると、F は例外型の局所極小集合 $\mathcal{M}$ に含まれる例外葉となることが知られている。このような F 及び $\mathcal{M}$ に対して、次にあげる定理は、古典的ではあるが、重要な結果である。

定理 (1)(Sacksteder) $\mathcal{M}$ は縮小写像をホロノミーとしてもつような葉を含む。

定理 (2)(Hector-Duminy) F はその非真側に縮小写像をホロノミーとして持つ。

定理 (3)(Cantwell-Conlon) $\mathcal{M}$ が Markov 型ならば、高々有限枚の半真例外葉を含む。

定理 (4)(稲葉) $\mathcal{F}$ が横断的区分線形な葉層で、ある C^2 葉層と位相共役ならば、$\mathcal{M}$ は高々有限枚の半真例外葉を含む。

一方、$q \geq 2$ である場合、興味深い結果は未だに得られていない。そこで、研究対象を制限するために、北海道大学の西森敏之は、余次元 q 横断的相似葉層を直接扱うかわりに、R^q の局所相似変換のなす擬群を扱い、その定性的な性質を調べる事にし、さらに、余次元 1 の

場合における“半真葉”(擬群の作用の言葉では“半真軌道”)の概念の代替として、“bubblesを持つ軌道”という概念を導入した; Γ を R^q 内の有界凸開集合を定義域と値域に持つ相似変換のなす擬群とし、$x \in R^q$ の Γ-軌道$\Gamma(x) = \{h(x)|h \in \Gamma\}$ を考える。この時、各 $y \in \Gamma(x)$ に対して、空でない有界凸開集合 B_y (これを y での bubble という) が存在して次の三条件を満たす時、$\Gamma(x)$ は bubbles $\{B_y\}_{y\in\Gamma(x)}$ を持つという; (a) yは B_yの境界に含まれる。(b) $y_1, y_2 \in \Gamma(x)$ $(y_1 \neq y_2)$ ならば $B_{y_1} \cap B_{y_2} = \emptyset$。(c) $h \in \Gamma$ に対し、h の R^q 全体への拡張を $\bar{h}$ と書いた時、$h(y) \neq y$ なる $y \in \Gamma(x)$ に対し、$\bar{h}(B_y) = B_{h(y)}$。

このような状況設定の下で、西森は、次の形で、(1) の Sacksteder の定理が相似変換の場合に成り立つ事を示した; Γ の元 g および $\Gamma(x)$ の閉包に含まれる点 z で、$g(z) = z$ かつ g が z への縮小写像であるものが存在する。

ここでは、この設定の下で、bubbles を持つ軌道の定性的な性質の研究を続け、特に、余次元 1 の場合における、上にあげた Hector-Duminy の定理、Cantwell-Conlon-稲葉の定理のアナロジーについて考察を行った。

Hector-Duminy の定理については、Hector が余次元 1 で実解析的である場合に行った証明を参考にし、「Γ の元 g で、$g(x) = x$ かつ g が恒等写像でないものが存在する」事を明らかにした。さらに、Γ の作用及び x でのホロノミーの生成元の記述及びそれらの共通定義域の存在についての考察と特徴づけを行う事により、「Γ の元 g で、$g(x) = x$ かつ g が縮小写像となるものが存在する」事を導き出した。また、ここでの議論により、(3) の Cantwell-Conlon の定理、(4) の稲葉の定理に関しては、「軌道 $\Gamma(x)$ の閉包が含む軌道で bubbles を持つものは有限個」という形で示した。

ホロノミーとして縮小写像の存在は分かったのであるが、回転するホロノミーも存在しうるため、そのようなホロノミーの性質を明らかにする事も重要である。ここでは、2 次元、つまり、Γ が R^2 の局所相似変換のなす擬群である場合に限って考察を行った。この状況のもとでは、「y を軌道 $\Gamma(x)$ の閉包に含まれる点、$g \in \Gamma$ を $g(x) = x$ をみたす x における回転写像であるとすると、ある n が存在して g^n は恒等写像になる。つまり、ホロノミー写像が回転であれば、それは、有限位数 (有限回の合成をとることにより、恒等写像) となる」事を明らかにした。また、さらに、「軌道 $\Gamma(x)$ のホロノミーはコンパクトな台を持つ」つまり、軌道 $\Gamma(x)$ の十分大きなコンパクト集合の外で、ホロノミーを考えた場合、それは全て恒等写像となっていることを明らかにした。

これを要するに、著者は相似変換擬群の定性論における定理の形で横断的相似構造をもつ葉層に対する新知見を得たものであり、微分トポロジー (葉層構造論) に貢献すること大なるものがある.

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める.