

学位論文題名

Functional Integral Representation of a Model in Quantum Electrodynamics

(量子電磁力学のあるモデルの汎関数積分表示)

学位論文内容の要旨

この論文の目的は、スカラーポテンシャル V をもった非相対論的荷電粒子とクーロンゲージのもとで量子化された輻射場とのある相互作用をあらわすモデルを考え、そのハミルトニアンがつくる熱半群の汎関数積分表示を構成することである。このモデルは、「Lamb のずれ」のような Dirac 理論では説明できなかった物理現象を解析するのに、大変有効なモデルであることが知られている。

Wiener 経路積分の方法は、古典的なハミルトニアンのつくる熱半群の解析のために大変重要である。特に、外場中の Schrödinger ハミルトニアン

$$\mathbf{H}_{cl} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d (-iD_{\mu} - A_{\mu})^2 + V \quad (1)$$

によって生成される熱半群が、確率積分を利用して経路積分表示されることはよく知られている。これは、Feynman-Kac-Itô の公式 (FKI 公式) と呼ばれている。

一方、E.Nelson は、マルコフ場から構成的場の理論を構築することと関係付けて「一般化された経路の空間」という概念を導入した (J.Funct.Anal.12(1973))。その後、F.Guerra, L.Rosen, B.Simon らは Boson Fock 空間の自由ハミルトニアンのつくる熱半群の汎関数積分表示を与える Feynman-Kac-Nelson の公式 (FKN 公式) を導いた (Ann.of Math.101(1975))。

これらの古典的な経路積分表示と構成的場の理論の汎関数積分表示の方法は、非相対論的粒子と量子化された場 (Bose 場) の相互作用モデルへ応用された。J.Fröhlich は、汎関数積分法と確率積分を応用して Pauli-Fierz モデルを解析することを示唆した (J.Stat.Phys.23(1980))。我々の目的は、J.Fröhlich が示唆した、Pauli-Fierz モデルに対する汎関数積分表示を数学的に厳密に与えることであり、さらに、(1) の外場中のハミルトニアンが満たした、Diamagnetic 不等式が Pauli-Fierz モデルにも存在することを示すことである。

我々が考察するハミルトニアン $\mathbf{H}_{\rho,B} + V \otimes I$ は、2つのヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R}^d)$ と $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ のテンソル積 $\mathcal{M}_B$ 上の作用素として次で定義される；

$$\mathbf{H}_{\rho,B} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d (-iD_{\mu} \otimes I - A_{\mu}(\rho(\cdot)))^2 + I \otimes \mathbf{H}_{0,B}. \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ は $\underbrace{L^2(\mathbf{R}^d) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbf{R}^d)}_{d-1}$ 上のボゾンフォック空間、 $A_{\mu}(\rho(\cdot))$ は、紫外切断関数

ρ をもった μ 方向の時刻ゼロの輻射場, $\mathbf{H}_{0,B}$ は, $\mathcal{F}(W)$ 上の自由ハミルトニアン, を各々あらわす. (1) と (2) を比較すると, $e^{-t\mathbf{H}_{\rho,B}}$ に対する汎関数積分表示は FKN 公式と FKI 公式に非常に深い関係があるということが予想される.

現在に至る多くの研究では $\mathbf{H}_{\rho,B}$ の代わりに, 双極子近似を施した $\mathbf{H}_{\rho,B}^D$ が考察されてきた. この近似は, $\mathbf{H}_{\rho,B}$ のなかの $\rho(x)$ を $\rho(0)$ に置き換えることによって定義される. 本来のハミルトニアン $\mathbf{H}_\rho$ の厳密な解析は, 今までわずかな結果があるだけである. その困難は, 微分演算子 D_μ と $A_\mu(\rho(x))$ のカップリングに起因している. 特に, 物理状態の一意的時間発展を保証する本質的自己共役性の問題について, $\mathbf{H}_{\rho,B}^D$ の本質的自己共役性はよく知られているが, $\mathbf{H}_{\rho,B}$ については, カップリング定数 e が十分小さいときしか, その本質的自己共役性がわかっていない. そのために, 我々は, 本論文の中で $\mathbf{H}_{\rho,B}$ のどのような自己共役拡張を考えているかを明確にしなければならない.

始めに, 与えられた任意の偏極ベクトル $e^r, r = 1, \dots, d$ に対して, 2つのヒルベルト空間 $[\tilde{\mathcal{H}}_{-1}]$ と $[\tilde{\mathcal{H}}_{-2}]$ を定義する. 次に, $\mathcal{M}_B$ から $\mathcal{M} = L^2(\mathbf{R}^d) \otimes L^2(Q_{-1}, d\mu_{-1})$ へのユニタリ作用素 $\mathcal{U}$ を構成する. ここで, ヒルベルト空間 $L^2(Q_{-1}, d\mu_{-1})$ は, $[\tilde{\mathcal{H}}_{-1}]$ を指標とするガウス超過程に対する確率測度空間上の L^2 空間. $\mathcal{M}$ 上の作用素 $\mathbf{H}_\rho$ を次で定義する;

$$\mathbf{H}_\rho = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d \left(-iD_\mu \otimes I - \phi_{\mathcal{F},\mu}^\rho \right)^2 + I \otimes \mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}_{\rho,0} + I \otimes \mathbf{H}_0.$$

ここで, $\phi_{\mathcal{F},\mu}^\rho$ は, Q_{-1} 上のあるガウス超過程, $\mathbf{H}_0$ は, $L^2(Q_{-1}, d\mu_{-1})$ 上のある自己共役作用素. このとき, ある定義域 $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{M}_B$ が存在して次を示すことができる.

$$\mathcal{U}^{-1} \mathbf{H}_\rho \mathcal{U} \Big|_{\mathcal{D}_B} = \mathbf{H}_{f,B} \Big|_{\mathcal{D}_B}.$$

ここで, $\rho(x) = (\hat{f}(\cdot)e^{i \cdot x})^\vee$. 次に, $\mathbf{H}_{\rho,0}$ のある自己共役拡張である $\tilde{\mathbf{H}}_{\rho,0}$ を無限小生成子としてもつ強連続 C_0 半群 $G_\rho(t)$ を構成し, その汎関数積分表示を求める. 我々は, ここで, $\mathbf{H}_\rho$ の厳密な定義を $\tilde{\mathbf{H}}_{\rho,0}$ と $I \otimes \mathbf{H}_0$ の 2 次形式和として定義する;

$$\mathbf{H}_\rho \equiv \tilde{\mathbf{H}}_{\rho,0} + I \otimes \mathbf{H}_0.$$

このハミルトニアン $\mathbf{H}_\rho$ のつくる熱半群の汎関数積分表示を導くことが主目的である.

定理 1 $F, G \in \mathcal{M}$ とする. このとき, あるクラスの ρ 及び V に対して

$$\begin{aligned} \langle F, e^{-t(\mathbf{H}_\rho + V \otimes I)} G \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_{\mathbf{R}^d \times \Omega} d\mu \int_{Q_{-2}} d\mu_{-2} \exp \left(- \int_0^t V(b(s) + x) ds \right) \\ &\times \exp \left(i \phi_{\mathcal{E}} \left(\sum_{\mu=1}^d \pi_{-2}^{\rho,\mu}(t, x) \right) \right) J_t \bar{F}(b(t) + x) J_0 G(x), \end{aligned}$$

ここで, (Ω, Db) は確率測度空間, $d\mu = dx \otimes Db$, $b(t)$ は Ω 上の d 次元ブラウン運動, $(Q_{-2}, d\mu_{-2})$ は $[\tilde{\mathcal{H}}_{-2}]$ を指標とするガウス超過程 $\phi_{\mathcal{E}}$ に対する確率測度空間, $\pi_{-2}^{\rho,\mu}(t, x)$ はヒルベルト空間値確率積分であらわされる $L^2(\Omega; [\tilde{\mathcal{H}}_{-2}])$ に含まれるベクトル, J_t, J_0 は $L^2(Q_{-1})$ から $L^2(Q_{-2})$ へのある縮小作用素を各々あらわす. さらに, この積分表示から次の Diamagnetic 不等式を導くことができる.

定理 2 $F, G \in \mathcal{M}$ とする. このとき, あるクラスの ρ 及び V に対して

$$\left| \left\langle F, e^{-t(\mathbf{H}_\rho + V \otimes I)} G \right\rangle_{\mathcal{M}} \right| \leq \left\langle |F|, e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta \otimes I + I \otimes \mathbf{H}_0 + V \otimes I)} |G| \right\rangle_{\mathcal{M}}.$$

以上により, 古典的な熱半群の経路積分表示及び Diamagnetic 不等式と類似した Pauli-Fierz モデルに対する熱半群の汎関数積分表示及び Diamagnetic 不等式をえることができた.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 新 井 朝 雄

副 査 助 教 授 井 上 昭 彦

副 査 助 教 授 岩 田 耕 一 郎

学 位 論 文 題 名

Functional Integral Representation of a Model in Quantum Electrodynamics

(量子電磁力学のあるモデルの汎関数積分表示)

この論文は、Pauli-Fierz モデルとよばれる、非相対論的量子電磁力学のモデルについての数学的研究である。このモデルは、非相対論的電子と量子化された電磁場との相互作用を記述し、非相対論的領域では、物理的にも現実的なモデルである。Pauli-Fierz モデルについての数学的研究は、その重要性にもかかわらず、ある種の数学的困難が伴うため、これまで、あまりなされてこなかった。この学位論文の主結果は、モデルのハミルトニアン H の自己共役拡大の構成とそれが生成する熱半群 e^{-tH} に対して、汎関数積分表示を導いたことである。これらの結果は真に新しいものであり、これによって、Pauli-Fierz モデルについての知見と理解が深まった。使われる手法の本質は、有限次元における、ベクトルポテンシャル付きの Schrödinger 作用素に対する Feynman-Kac-Ito 公式を無限次元の場合に拡張することにある。この拡張はすぐれて数学的な問題であり、著者はこの問題に対して明解な解答をあたえた。

本論文であたえられた結果は、Pauli-Fierz モデルについて新知見を得たものであり、汎関数積分論、無限次元解析、および非相対論的量子電磁力学の数学的に厳密な基礎づけに対して貢献するところ大なるものがある。

よって、著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。