

学位論文題名

Analysis of Families of Strongly Commuting Self-adjoint Operators
with Applications to Perturbed
d'Alembertians and Dirac Operators

(強可換自己共役作用素の族の解析と摂動を受けた
ダランベールシャン及びディラック作用素への応用)

学位論文内容の要旨

2つの線形作用素 A 及び B に対してこの2つが互いに可換であるとは、通常は $AB = BA$ によって定義される。行列をはじめとするいわゆる有界線形作用素の場合は、その定義域が与えられた空間全体であるのでこの定義で問題ないが、この論文で取り扱う微分作用素や掛け算作用素は一般には非有界であり、定義域は空間全体とはならないので、通常の可換の定義では意味をなさない。しかし、非有界であっても自己共役な作用素であれば、別の意味で可換を定義することができる。それは強可換といわれるもので、各々の自己共役作用素のもつスペクトル測度（これは射影作用素なので有界）が可換であることをもって定義される概念である。有界自己共役作用素の場合は強可換ならば普通の意味でも可換である。

この論文ではまず d 次元ミンコフスキー空間 (M^d と記す) において互いに強可換であるような3つの自己共役作用素を定義する。これは微分作用素、掛け算作用素及び角運動量作用素と M^d のある元とのミンコフスキー内積によって定義されるもので、これらの作用素を用いることにより、共変微分（微分作用素にベクトルポテンシャルの摂動を与えた作用素）は普通の微分作用素にあるユニタリ作用素で変換した作用素とローレンツ変換により結ばれるということを示す。さらに、この共変微分からつくられる“摂動を受けた”クライナー-ゴールドン作用素（ダランベールシャンに定数作用素を加えたもの）と自由なクライナー-ゴールドン作用素との間にユニタリ同値性が成立することも示す。

一方、自己共役作用素 H に対しては、1パラメーターのユニタリ作用素 e^{isH} ($s \in \mathbb{R}$) が定義されるが、自由なダランベールシャンからつくられるユニタリ作用素に対しては、積分作用素で表現することができることがよく知られている。（この積分作用素の核にあたる関数は自由伝播関数といわれる。）ところがここまでで得られた結果を用いると、摂動

を受けたダランベールシャンから生成されるユニタリ作用素に対しても、その積分作用素としての表現が得られることがわかる。

これまでの結果は場の量子論におけるスカラー量子場の外場問題へ応用することができる。すべての自由粒子の波動関数はクラインーゴルドンの方程式を満足する。このクラインーゴルドンの作用素に対するグリーン関数はさきの自由なダランベールシャンからつくられるユニタリ作用素から得られるが、同様にして摂動を受けたクラインーゴルドン作用素（微分作用素を共変微分に置き換えたもので、この共変微分は物理的にはゲージ場と呼ばれる摂動を与えたゲージ共変運動量作用素に当たる）に対するグリーン関数はこれから生成されるユニタリ作用素を用いて求められる。このようにして、外場におけるスピン0の荷電粒子に対するグリーン関数が求められる。このグリーン関数は数学的には摂動を受けた超関数クラインーゴルドン方程式に対する基本解である。

スカラー量子場の外場問題についてはシュヴィンガーによる固有時の方法といわれる手法があるが、この論文ではその作用素論的な本質が明らかにされる。

以上は d 次元二乗可積分関数の空間 $L^2(R^d)$ において議論されているが、同様の議論はその直和空間においても成立する。それを第2部で述べることにする。

直和空間における結果もまた外場問題へ応用される。スピン1/2の荷電粒子の波動関数はディラック方程式を満足する。ディラック方程式は自動的にクラインーゴルドン方程式をも満足することが要求されるため、作用素は $L^2(R^d)$ の直和からなる空間におけるものとして定義する必要がある。このディラック作用素に対するグリーン関数を求めるにはまずクラインーゴルドン作用素のグリーン関数を求めてからこれにディラック作用素を施せば得られる。この手法を摂動を受けたディラック作用素にも利用する。摂動を受けたディラック作用素から摂動を受けたクラインーゴルドン作用素をつくり、このグリーン関数を計算したのちに求めるグリーン関数を求める。

最後に正準交換関係の表現という立場からの注意を述べる。運動量作用素（微分作用素）と位置作用素が正準交換関係を満足することは周知のことである（この組はシュレーディンガー表現と呼ばれる）が、ゲージ共変運動量作用素と位置作用素とではこの正準交換関係は部分的に崩れてしまう。しかしゲージ場の条件次第ではゲージ共変運動量作用素にあるローレンツ変換を施せばもとの運動量作用素とユニタリ同値になることがいままでの作用素の解析からわかる。一方、正準交換関係を満たす作用素の組は多数存在するがそれらとシュレーディンガー表現との間にはユニタリ同値がいえる。（フォン・ノイマンの一意性定理。より正確に言えばワイル形の正準交換関係を満たす作用素の組に対してシュレーディンガー表現とのユニタリ同値性が成立する。）ここで問題になるのは、ゲージ場であるベクトルポテンシャルにどれくらいの条件を与えれば、そのローレンツ変換が正準交換関係の1つの表現となりうるかということである。これは今後の研究課題の1つである。

学位論文審査の要旨

主 査	教 授	新 井 朝 雄
副 査	助教授	井 上 昭 彦
副 査	助教授	岩 田 耕一郎
副 査	助教授	佐 藤 鍊太郎

学 位 論 文 題 名

Analysis of Families of Strongly Commuting Self-adjoint Operators with Applications to Perturbed d'Alembertians and Dirac Operators

(強可換自己共役作用素の族の解析と摂動を受けた
ダランベールシャン及びディラック作用素への応用)

著者は、本論文において、 d 次元ミンコフスキー空間のある種の条件をみたすベクトルと反対称テンソルに付随する、 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の自己共役作用素で強可換なものを導入し、これらの作用素と正準運動量作用素に関して、作用素解析を展開する。正準運動量作用素のある種の摂動に対して、これをある作用素値 Lorentz 変換によって変換したものは、もとの正準運動量作用素とユニタリ同値になることが示される。この結果を用いて、ある種の摂動を受けたダランベールシャンおよびディラック作用素について、それらが生成するユニタリ群の積分核表示が導かれる。物理学への応用として、あるクラスの電磁ポテンシャルに対して、クライン-ゴルドン作用素やディラック作用素の Green 関数に対する積分核表示が得られる。これらはすべて新しい興味ある結果である。

本論文の方法は、場の量子論の外場問題における Schwinger の固有時の方法に対する作用論的に明解で厳密な認識をあたえるとともに、Schwinger の方法では論じられなかったクラスの電磁ポテンシャルをも統一的に扱うことを可能する。この意味でも重要な寄与がなされている。

本論文で展開された理論は以前には議論されたことがない真に新しい開拓的なものであり、作用素論に対して、新しい領域と知見をもたらした。また、場の量子論の数学的研究に貢献するところも大きい。

よって、著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める。