

学位論文題名

NON-TRIVIAL STABLE SOLUTIONS
TO GINZBURG-LANDAU TYPE EQUATIONS

(ギンツブルグ-ランダウ型方程式の非自明安定解)

学位論文内容の要旨

(低温)超伝導の現象は、物質の中でマクロな量の自由電子が外力を与えないで、減衰することなく半永久に流れる状態のことである。ギンツブルグとランダウは、超伝導の状態に対応する(自由)エネルギー汎関数を考え、その極値問題として偏微分方程式(GL方程式)を定式化した。それ以後、多くの人々(物理学者、工学者)による研究があるが、これについて、偏微分方程式論の立場から問題の定式化を含めて、解の存在や構造まで論じられるようになったのはきわめて最近のことである。この論文の目的は主にGL方程式の解の存在やその構造を研究することである。とくに安定性や領域依存性について調べたい。

ギンツブルグとランダウの導入した低温超伝導現象のモデルによって、外場がない時の自由エネルギー $\mathcal{H}_\lambda$ は磁界のエネルギーと磁界中超伝導電子の運動エネルギーを加えたもので、電子の状態 Φ と磁場のベクトルポテンシャル A として、次のように表せる。

$$\mathcal{H}_\lambda(\Phi, A) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right) dx + \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{2} |\operatorname{rot} A|^2 dx \quad (1)$$

但し、 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ は有界領域、 $\lambda > 0$ はパラメータである。超伝導定常状態 (Φ, A) が汎関数 $\mathcal{H}_\lambda$ の極小値を与えるので、 (Φ, A) は $\mathcal{H}_\lambda$ のオイラー・ラグランジュ方程式であるギンツブルグ-ランダウ方程式(GL方程式)

$$(\nabla - iA)^2 \Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - i\langle A \cdot \nu \rangle = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A + (i(\bar{\Phi} \nabla \Phi - \Phi \nabla \bar{\Phi})/2 + |\Phi|^2 A) \Lambda_\Omega = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^3, \quad (4)$$

を満たす。但し、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{R}^3$ の標準内積、 ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル、 Λ_Ω は領域 Ω の特性関数である。

(1) および (2)-(4) において電流が作る磁場が自身に与える効果を見捨て(すなわち $A = 0$) 得られる、次のモデルも同様に重要とされている。

$$\Delta \Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (6)$$

(2)-(4) と (5)-(6) のような非線形偏微分方程式の境界値問題の解の構造は状況に依存していちじるしく異なることがある。本研究が考える問題は方程式 (2)-(4) および (5)-(6) の非自明安定解の存在性で多い。特に、解の領域の形状に依存性に興味がある。これは物理的には超伝導体の位相的あるいは幾何的な形状によって現象的な差が現れるか?といったことに対応している。神保と森田において Ω が凸領域ならば、方程式 (5)-(6) の非自明な安定解は存在しないことが示されている。これにより求める安定な解を得るには多少なりとも複雑な領域を考えねばならないことが分かる。

第1章では、方程式 (5)-(6) に対して研究した。領域 Ω は $\mathbf{R}^n$ の有界領域として2以上で一般次元で考える。任意の実数 θ に対して、 $e^{i\theta}$ が (5)-(6) の安定な定数解であることが計算で直接確かめられる(但し、本章の安定解ということは時間に依存する GL 方程式の安定な解を指す)。しかし、このような自明な安定解を除いて、非自明な安定解が存在するか?この問題に対して、神保と森田が凸領域ならば、非自明な安定解は存在しないことが示した。凸領域ではなく、もっと弱く可縮であっても同じ結論が成り立つと予想していたが最近 $n \geq 3$ の場合には誤りであることが神保と森田およびダンサーの研究によって判明したのである。本研究は穴があるような領域を含めた Ω を考える。扱った状況は、空間次元 $n = 2$ 又は3のときは、 Ω が単連結でない領域の場合に相当する。この時、次の結論を得られる。

十分大きな $\lambda > 0$ に対し (5)-(6) の非自明な安定な解 Φ_λ が存在する。さらに $\Phi_\lambda(x) = w_\lambda(x)e^{i\theta_\lambda(x)}$, w_λ が正値関数、 θ_λ が S^1 値関数で、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |w_\lambda(x) - 1| = 0 \quad (7)$$

となるようにあらわせる。また、 θ_λ のホモトピータイプは自由にとれる。

第2章では、上の結論を方程式 (2)-(4) に対して、同様の問題意識で研究した。 Ω は $\mathbf{R}^3$ 空間の単連結でない有界領域と仮定する。このとき、十分大きな $\lambda > 0$ に対し (1) の極小解 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ が存在する。さらに $\Phi_\lambda(x) = w_\lambda(x)e^{i\theta_\lambda(x)}$, w_λ は (7) をみだし、 θ_λ のホモトピータイプは自由にとれる。

解の存在性の証明について、まず $\lambda = \infty$ の場合の極小解を変分の方法を用いて求める。次に、(2)-(4) は $\lambda = \infty$ 時の摂動したものと考えて、(2)-(4) の解をシャウダーの不動点定理を用いて求める。シャウダーの定理を使うために、 A があるので技術的に難しい点はあるから、特異積分の評価と非線形楕円型方程式の正則性理論など技術を使わなければならない。

解の安定性について、(1) 及び (2)-(4) は次のゲージ変換で不変であることを注意する。

$$\begin{aligned} (\Phi_\lambda, A_\lambda) &\longmapsto (\Phi', A') \\ \Phi' &= e^{i\rho} \Phi_\lambda, \quad A' = A_\lambda + \nabla \rho \quad (\rho: \mathbf{R} - \text{値関数}). \end{aligned}$$

$(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ から ρ を様々にとって得られる連続体は1つの物理の状態に対応すると考えられるから、 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ の安定性を考えるにはこの連続体に横断する方向への $\mathcal{H}_\lambda$ の増減を評価する必要がある。それは次の不等式によって達成される。すなわち、横断的空間と接空間はそれぞれ $N(\Phi_\lambda, A_\lambda)$, $T(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ としたとき、 $\mathcal{H}_\lambda$ の第2変分 L_λ に対して、次の重要な不等式が成立する。ある定数 $c > 0$ があって、 λ が十分大きな時、

$$L_\lambda(\Phi_\lambda, A_\lambda; \Psi, B) \geq c(\|\nabla \Psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|B\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla B\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}^2)$$

但し、 $(\Psi, B) \in N(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ 。この不等式から、解の安定性を証明することができるだけでなく、種々の応用も見込まれる。

第3章では、ギンツブルグ-ランダウ型の非線形楕円型方程式系を研究した。第1章の結果から、および最近 Bethuel, Brezis and Helein が Ω は $\mathbf{R}^2$ 空間の有界の星型領域とする

時、方程式 (5) のディリクレ問題の研究によって、この方程式の解 Φ_λ は $\lambda \rightarrow \infty$ 時、ある Ω から S^1 への調和写像に近づくことがわかる。第 3 章で、次のようなギンツブルグ-ランダウ型楕円型方程式系に対して、 $\lambda \rightarrow \infty$ の時、解の挙動と調和写像の関係を調べた。

Ω が $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$) の滑らかな境界をもつ有界領域とする。

$$\Delta u - \lambda W_u(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (9)$$

但し、 u が m ベクトル値関数で、 $W(u) = \frac{1}{4}(a(u) - 1)^2$, $W_u(u)$ は W の勾配とする。また、 W の零点集合は滑らかな $m-1$ 次元のリーマン多様体 N とし、 $a(u)$ は N の近傍で滑らかな関数で、次のような増加条件をみたすことを仮定する。 $|a(u)| \leq C(1 + |u|^p)$ (但し、 $n=2$ のとき $1/2 < p < \infty$ 、 $n > 2$ のとき $p = n/(n-2)$)。

方程式 (8)-(9) に対して、次のことを証明した。 Ω から N への調和写像 $\bar{u}$ ($\bar{u}|_{\partial\Omega} = g$) が、ある Ω の体積に関する条件をみたすと、十分大きな $\lambda > 0$ に対して方程式 (8) - (9) の解 v_λ が存在して、 v_λ は $\bar{u}$ に $\lambda \rightarrow \infty$ のとき一様収束する。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 儀 我 美 一

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 教 授 久保田 幸 次

副 査 教 授 小 澤 徹

副 査 助教授 神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

NON-TRIVIAL STABLE SOLUTIONS TO GINZBURG-LANDAU TYPE EQUATIONS

(ギンツブルグ-ランダウ型方程式の非自明安定解)

(低温)超伝導の現象は、物質の中でマクロな量の自由電子が外力を与えないで、減衰することなく半永久に流れる状態のことである。ギンツブルグとランダウは、超伝導の状態に対応する(自由)エネルギー汎関数を考え、その極値問題として偏微分方程式(G L 方程式)を安定化した。それ以後、多くの人々(物理学者、工学者)による研究があるが、これについて、偏微分方程式論の立場から問題の安定化を含めて、解の存在や構造まで論じられるようになったのはきわめて最近のことである。とくに安定性や領域依存性について調べたい。

ギンツブルグとランダウの導入した低温超伝導現象のモデルによって、外場がない時の自由エネルギー E_a は磁気エネルギーと磁気中超伝導電子の運動エネルギーを加えたもので、電子の状態 u と磁場のベクトルポテンシャル A の汎関数である。但し $a > 0$ はパラメータである。

熱伝導定常状態 (u, A) が汎関数 E_a の極小値を与えるので、 (u, A) は E_a のオイラー・ラグランジュ方程式であるギンツブルグ-ランダウ方程式(G L 方程式)を満たす。

ここで電流が作る磁場が自身に与える効果を無視して(すなわち $A = 0$) 得られる、次の方程式も同様に重要とされている。

$$\Delta u + a(1 - |u|^2)u = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

但し、 D は R^3 の有界領域である。境界条件には斉次ノイマン条件である。このような非線形偏微分方程式の境界値問題の解の構造は状況に依存していちじるしく異なることがある。本研究で考える問題はギンツブルグ・ランダウ方程式の非自明安定解の存在である。特に、解の領域の形状に依存性に興味がある。これは物理的には超伝導体の位相的あるいは幾何的な形状によって現象的な差が現れるか? といったことに対応している。神保と森田において D が凸領域ならば、方程式の非自明な安定解は存在しないことが示されている。これにより求める安定な解を得るには多少なりとも複雑な領域を考えねばならないことが分かる。

本論文の主結果は次の3つである。まず方程式(1)について D に穴がある場合、十分大きな a について、非自明解があることを示した。またこの解は a を無限大に近づけると

絶対値は 1 に近づくようになっている。D の条件は単連結でないというもので少なくとも D の次元が 2 や 3 では同値である。

次に磁界も考えた問題で同様な結論を得ている。この場合は a が無限大のときの状況が非自明なことから、定常解が孤立していないことにより方程式 (1) に対してより難しくなっている。著者はこの困難を偏微分方程式の解析を駆使してのりこえている。

最後に (1) を一般化した方程式のディリクレ問題を考え、 a を無限大に近づけたとき調和写像に近づくことを調和写像の存在を仮定して示した。

以上の研究は Communications in Partial Differential Equations をはじめ、種々の国際誌に出版、または出版予定であり、国際的にも高々評価されている。

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格があると認める。