

学位論文題名

DIVERGENT DIAGRAMS OF SMOOTH MAPPINGS AND ITS APPLICATIONS

(滑らかな写像の発散図式とその応用)

学位論文内容の要旨

多様体上の写像の発散図式 $(\mu, g): N \xleftarrow{\mu} M \xrightarrow{g} P$ は微分トポロジーにおける種々の分野に現われる. 例えば包絡面の理論, 1 階微分方程式の解の特異性の理論, 映像理論, web 幾何学, 滑らかな写像の安定性と分類理論の一般化等において重要な役割をになう.

本論文は, 2 つの部分からなる. 第 1 部では, 映像理論の 1 つの問題として“地形図”の分類問題を, 第 2 部では, “Clairaut 型”の微分方程式および完全積分可能な 1 階常微分方程式の分類を研究した. いずれの場合においても, 写像の発散図式が基本的かつ重要な役割をになう.

第 1 部) ある種の幾何学的対象物を見たときに見える像の特異点の研究は, 特異点理論の立場から近年になって研究され始めた分野でありコンピューターグラフィックスへの応用と関連し重要性を増してきている. 第 1 部においては, 曲面の等高線族を任意の平面上へ, その平面の法線方向に沿って正射影した像である曲線族の特異点の分類を研究した. この曲線族は, 空中から任意の方向を見たときの地形図とみなされる. 即ち, 空中にいる観察者が地上(曲面)の等高線を任意の方向から見るときに見える像である.

曲面 $M \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ と法線方向が d である平面 $E_d \subset \mathbb{R}^3 (M \cap E_d = \emptyset)$ を考える. M 上の等高線族 $\{z = \text{一定}\} \cap M$ を平面 E_d の上へ, 方向 d の正射影をしたとき, その像を方向 d からの M の地形図と呼ぶ. $Emb(M, \mathbb{R}^3)$ を M の $\mathbb{R}^3$ への埋め込み写像全体の集合とし Whitney C^∞ 位相を入れる. この地形図の分類は, ある種の発散図式 $T_i: \mathbb{R} \leftarrow M \rightarrow \mathbb{R}^2$ の分類に帰着される事が分かるので図式 T_i を semi-local に分類する事を問題とする. 即ち, 図式 T_i の multiterm $rT_i = (\mu_1, g_1; \dots; \mu_r, g_r):$

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\mu_1} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{g_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ & & \vdots & \nearrow g_r & \\ & & (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\mu_r} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

を次の同値関係によって分類する: $rT_i = (\mu_1, g_1; \dots; \mu_r, g_r)$ と $rT_{i'} = (\mu'_1, g'_1; \dots; \mu'_r, g'_r)$ が C^∞ 同値であるとは, C^∞ 微分同相芽 λ_k, ϕ_k, ψ が存在して $\lambda_k \circ \mu_k = \mu'_k \circ \phi_k, \psi \circ g_k = g'_k \circ \phi_k (k = 1, \dots, r)$ が成り立つ事とする.

本論文では, 次の結果を得た: “generic” な $i \in Emb(M, \mathbb{R}^3)$ に対して $rT_i (r = 1, 2, 3)$ の特異点の型を決定した. そして, その特異点の型の標準形を求めた. ($r > 3$ の場合 “generic” には, $r = 3$ の場合に自明なものが加わるだけである.) $r = 1$ の場合, Dufour によって研究され

た発散図式の分類と本質的には一致し、 $r > 1$ の場合は、Dufour の研究の多重芽版である。

第2部) 微分方程式の分類は、古来より様々な立場から研究されているが、ここでは Clairaut 型のシステムすなわち古典的完全解を持つ holonomic な 1 階偏微分方程式系を対象とし、その分類 (S. Lie の意味での点変換による分類) を研究した。ここで holonomic な 1 階偏微分方程式系は n 独立変数の場合、 n 個の方程式 $F_i(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) によって与えられるものであるが幾何学的には、以下のように定式化される。

1-ジェット空間 $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ に標準的な接触形式 $\theta = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ によって接触構造を入れる。ここで $(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$ を $J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ の自然な座標とする。 $\pi: J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ を自然な射影 $\pi(x, y, p) = (x, y)$ とする。1 階微分方程式芽の holonomic なシステムとは、はめ込み芽 $f: (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow J^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ の事であり、 f が完全積分可能とは沈め込み芽 $\mu: (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ が存在して $\langle d\mu \rangle_{\mathcal{E}_u} \cap \langle f^*\theta \rangle_{\mathcal{E}_u}$ をみたすときに言う。ここで $\mathcal{E}_u$ は $(\mathbf{R}^{n+1}, 0)$ 上の滑らかな関数芽のなす環を表す。今後、完全積分可能である 1 階微分方程式芽の holonomic なシステムを単にシステムと言う事にする。特に、システム f が Clairaut 型であるとは、各 $t \in (\mathbf{R}, 0)$ に対して解のグラフ $\pi \circ f(\mu^{-1}(t))$ が特異点を持たない (つまり古典的完全解をもつ) とときに言う。システム f は次のように定義される積分図式と generic に 1 対 1 に対応する。すなわち写像芽の発散図式 $(\mu, g): (\mathbf{R}, 0) \xleftarrow{\mu} (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \xrightarrow{g} (\mathbf{R}^{n+1}, 0)$ が積分図式であるとは、システム f が存在して、 μ は f の完全積分であり且つ $g = \pi \circ f$ をみたすときに言う。2 つの積分図式は微分同相芽によって写り合うとき同値であると言われる。システムの分類 (S. Lie の意味での点変換による分類) は積分図式の分類に帰着され、一般のシステムの場合 $n = 1, 2, 3$ のときにのみ分類されている。本論文では、Clairaut 型について分類を行い、任意の次元 n に対して標準形を得た。この場合、次の標準形にのみ “functional moduli” α が現われる：

$$\mu_\alpha = u_{n+1} + \alpha \circ g, \quad g = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}^{n+2} + \sum_{i=1}^n u_i u_{n+1}^i).$$

ただし α は $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0)$ 上の滑らかな関数芽で $\alpha(0) = 0$ をみたすものである。この $\alpha \in \mathcal{E}_u$ を functional moduli と呼ぶ。そこで次に functional moduli を特徴付けて分類を精密にした。

$\mathcal{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid F = \frac{\partial F}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0 \text{ をみたす } t \text{ が存在する}\}$ とおく。ただし $F(t, x_1, \dots, x_n, y) = t^{n+2} + x_1 t + \dots + x_n t^n - y$ 。

このとき次の結果を得た：任意の α に対し α' が存在して以下をみたす：

- (1) (μ_α, g) と $(\mu_{\alpha'}, g)$ は同値,
- (2) $\alpha'|_{\mathcal{D}^n} = 0$.

更に functional moduli の間に、ある同値関係 $\sim$ を入れて functional moduli の一意性を示した： $\alpha|_{\mathcal{D}^n} = \alpha'|_{\mathcal{D}^n} = 0$ とする。このとき (μ_α, g) と $(\mu_{\alpha'}, g)$ が同値である必要十分条件は $\alpha \sim \alpha'$ 。

以上の結果から、 $\alpha|_{\mathcal{D}^n} = 0$ である functional moduli α の同値類は Clairaut 型のシステムの分類における完全不変量である事が分かる。また Clairaut 型の moduli space は $\{\alpha \mid \alpha|_{\mathcal{D}^n} = 0\} / \sim$ と決定される。

更に、Clairaut 型とは限らない完全積分可能な 1 階常微分方程式芽 (即ち、上記の定式化において $n = 1$ の場合のシステム) の分類に現われる事が知られている functional moduli を特徴付けてその分類を精密にした。この場合、解曲線がつくる web 構造に着目する事によって functional modulus に付随する力学系 $t \mapsto t + at^3 + \dots$ が標準形に現われる functional moduli と密接にかかわる事を明らかにした。

以上。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 泉 屋 周 一
副 査 教 授 諏 訪 立 雄
副 査 教 授 山 口 佳 三
副 査 助 教 授 石 川 剛 郎

学 位 論 文 題 名

DIVERGENT DIAGRAMS OF SMOOTH MAPPINGS AND ITS APPLICATIONS

(滑らかな写像の発散図式とその応用)

多様体上の写像の発散図式 $(\mu, g): N \xleftarrow{\mu} M \xrightarrow{g} P$ は微分トポロジーにおける種々の分野に現われる。例えば包絡面の理論, 1 階微分方程式の解の特異性の理論, 映像理論, web 幾何学, 滑らかな写像の安定性と分類理論の一般化等において重要な役割をになう。本論文は, 2 つの部分からなる。第 1 部では, 映像理論の 1 つの問題として“地形図”の分類問題, 第 2 部では, “Clairaut 型”の微分方程式および完全積分可能な 1 階常微分方程式の分類問題の研究である。いずれの場合においても, 写像の発散図式が基本的かつ重要な役割をになう。

第 1 部) ある種の幾何学的対象物を見たときに見える像の特異点の研究は, 特異点理論の立場から近年になって研究され始めた分野でありコンピューターグラフィックスへの応用と関連し重要性を増してきている。第 1 部においては, 曲面の等高線族を任意の平面上へ, その平面の法線方向に沿って正射影した像である曲線族の特異点の研究がテーマである。この曲線族は, 空中から任意の方向を見たときの地形図とみなされる。即ち, 空中にいる観察者が地上 (曲面) の等高線を任意の方向から見るときに見える像である。本論文では, “generic” な曲面に対してその地形図のある種の発散図式としてとらえてその分類を行っている。この研究は多重発散図式の分類と言う従来未開の結果を含んでいる。

第 2 部) 微分方程式の分類は, 古来より様々な立場から研究されているが, ここでは Clairaut 型のシステムすなわち古典的完全解を持つ holonomic な 1 階偏微分方程式系を対象とし, その分類 (S. Lie の意味での点変換による分類) を研究している。ここで holonomic な 1 階偏微分方程式系は n 独立変数の場合, n 個の方程式 $F_i(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) = 0 (i = 1, \dots, n)$ によって与えられるものであるが完全積分可能系についてはある種の発散図式

$$(\mu, g): (\mathbf{R}, 0) \xleftarrow{\mu} (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \xrightarrow{g} (\mathbf{R}^{n+1}, 0)$$

と generic に 1 対 1 に対応することがわかる。システムの分類 (S. Lie の意味での点変換による分類) はこの発散図式の分類に帰着され, 一般のシステムの場合は従来 $n = 1, 2, 3$ のときのみ分類されているが完全なものではない。本論文では, Clairaut 型について分類を行い, 任意の次元 n に対して標準形を得ている。この場合, 次の標準形にのみ “functional moduli” α が現われる:

$$\mu_\alpha = u_{n+1} + \alpha \circ g, \quad g = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}^{n+2} + \sum_{i=1}^n u_i u_{n+1}^i).$$

ただし α は $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, 0)$ 上の滑らかな関数芽で $\alpha(0) = 0$ をみたすものである. この $\alpha \in \mathcal{E}_u$ を functional moduli と呼ぶ. さらに、この functional moduli の満たすべき条件を求め分類を完成させ、holonomic な Clairaut システムの分類の完全不変量を決定している.

更に、Clairaut 型とは限らない完全積分可能な 1 階常微分方程式芽 (即ち、上記の定式化において $n = 1$ の場合のシステム) の分類に現われる事が知られている functional moduli の特徴付けを研究している. この場合、解曲線がつくる web 構造に着目する事によって functional modulus に付随する力学系 $t \mapsto t + at^3 + \dots$ が標準形に現われ、functional moduli と密接にかかわる事を明らかにしている.

これを要するに、著者は写像芽の発散図式の応用として地形図図式及び完全積分可能一階偏微分方程式系の分類理論に関して新知見を得たものであり、微分トポロジー (特異点論) に貢献すること大なるものがある.

よって著者は、北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める.