

学位論文題名

Global existence of classical solution of Cauchy problem for nonlinear wave equation

(非線型波動方程式に対する初期値問題における古典解の存在定理)

学位論文内容の要旨

偏微分方程式論のなかに双曲型方程式という大きな分野がある。単独の波動方程式は、その中でも最も基本的でかつ典型的なものの一つといえる。本研究では次のような非線型項を持つ波動方程式に対する初期値問題の古典解、即ち、 $R^n \times [0, \infty)$ 上で C^2 の解について考察する。

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(u, \partial_t u, \nabla u) \quad \text{in } R^n \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in R^n. \quad (2)$$

但し $u(x, t)$ は実数値関数であり、 $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $n \geq 2$ とする。また、 $F: R \times R \times R^n \rightarrow R$ は $p > 1$ に対し

$$F(\lambda) = O(|\lambda|^p) \quad \text{as } \lambda \rightarrow 0$$

を満たすものとする。つまり、 F は多項式のオーダーで増大するような非線型項である。

また、初期値はある意味で十分小さいと仮定する。それは次のような事情による。自明解 $u \equiv 0$ は初期値 $f = g = 0$ を満たす (1) の解となっている。そこで、小さな初期値を与えた時にも、やはり (1), (2) の時間大域解が存在するのかわかりという問題が考えられる。つまり方程式 (1) の安定性に関する問題である。既に次のような場合には、古典解が有限時間内に爆発し得ることが示されている。それは、非線型項の増大度のオーダーが小さかったり、初期値の無限遠方での減衰度が弱い場合であり、このことからどれほど初期値が小さくとも常に時間大域的に解が存在するとは限らないことが分かる。

さて、存在定理の証明は次のような不動点を見つける問題に帰着される。 X をある適切に選ばれたあるバナッハ空間とする。任意の $v \in X$ に対して、初期値問題

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(v, \partial_t v, \nabla v) \quad \text{in } R^n \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in R^n. \quad (4)$$

の一意的な解 $u \in X$ を対応させる写像を考える。この写像の不動点が実は、(1), (2) の解となっている。一般に、基本解の性質から $F(v, \partial_t v, \nabla v) \in C^{[n/2]+1}(R^n \times (0, \infty))$ であれば、 $u \in C^2(R^n \times (0, \infty))$ となることが知られている。つまり、古典解を得るための十分条件は $v \in C^{[n/2]+2}(R^n \times (0, \infty))$ ということである。しかしながら、これは全ての $n \geq 2$ に対して、いわゆる derivative loss が生じることを意味しており、このままでは解の空間 X すら定義

することができない。

本研究では初期値が球対称で空間次元が奇数の場合にこの困難が解消されることを示す。球対称性を仮定すると、一般の場合よりも扱いやすい特殊な解の表示式を得ることができ、最大値ノルムに関する減衰評価を得ることが可能となる。また、解の特異性は $r = 0$ のみにあらわれることも分かる。

更に、空間次元が奇数であることを仮定すると、 $r^{(n-1)/2}F(v, \partial_t v, \nabla v) \in C^{[n/2]+1}(R^n \times (0, \infty))$ であれば、 $r^{(n-1)/2}u \in C^{[n/2]+2}(R^n \times (0, \infty))$ となるという大変都合の良い性質が導かれる。つまり、 $r^{(n-1)/2}v \in C^{[n/2]+2}(R^n \times (0, \infty))$ を仮定すると $r^{(n-1)/2}u$ も同じ微分可能性を持つことになり、derivative loss が解消されるのである。

Part A では、非線型項と初期値に適切な条件を課すことで、上で述べた性質を十分に活用して (1), (2) の時間大域解の存在を示すことができた。そこでは、とくに F が未知関数の微分のみを含むような場合だけを扱っているが、そこでの議論は F が未知関数自身を含むような場合にも適当な修正を施すことにより適用できる。

Part B では F が未知関数自身のみを含むような場合に Part A で確立された手法を発展させて、次のような問題を考察した。いま、 $p_0(n)$ を次の 2 次方程式の正根とする。

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0.$$

このとき、初期値が無遠方で適当に減衰していて、かつ $p > p_0(n)$ ならば時間大域解の存在が予想されており、実際、 $n \leq 4$ の場合にはすでに示されている。とくに $n = 2, 3$ では初期値の減衰度の臨界値も定められている。

しかしながら、高次元 ($n \geq 5$) の場合にはこれまで部分的な結果しか得られていなかった。その原因は、 F が未知関数の微分を含まない場合にも $n \geq 4$ であれば derivative loss が生じることと無関係ではないと思われる。本研究では、初期値が球対称で空間次元が奇数の場合にこの未解決部分を完全に解決することができた。得られた結果は以下の通りである：次の初期値問題について考える。

$$\partial_t^2 u - \partial_r^2 u - \frac{n-1}{r} \partial_r u = F(u) \quad \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \partial_t u(r, 0) = g(r) \quad \text{for } r \in (0, \infty). \quad (6)$$

但し、 n は 5 以上の奇数とする。初期値に対して次のような減衰条件を考える。

$$\sum_{j=0}^2 |f^{(j)}(r)| \langle r \rangle^{\kappa+j} + \sum_{j=0}^1 |g^{(j)}(r)| \langle r \rangle^{1+\kappa+j} \leq \varepsilon. \quad (7)$$

ここで、 κ, ε は正のパラメーター、 $\langle r \rangle = \sqrt{1+r^2}$ 、 $f^{(j)}(r) = (\frac{d}{dr})^j f(r)$ とする。一方 p に対しては

$$p_0(n) < p < \frac{n+1}{n-3}, \quad (8)$$

を仮定する。この時、 ε が十分小さければ解の最大存在時間 T_ε に対して次の評価が成り立つ。

$$T_\varepsilon = \infty \quad \text{if } \kappa \geq \kappa_0 = 2/(p-1), \quad (9)$$

$$T_\varepsilon \geq C\varepsilon^{-(p-1)/(2-(p-1)\kappa)} \quad \text{if } 0 < \kappa < \kappa_0. \quad (10)$$

ここで、 $C = C(p, n, \kappa) > 0$ は定数。

すなわち、本研究で $p = p_0(n)$ 、 $\kappa = \kappa_0$ がそれぞれ、初期値問題 (5), (6) における増大度お

よび減衰度の臨界値であることが示された. なおこの結果において, (10) の評価は ε のオーダーに関して最良のものである.

学位論文審査の要旨

主査	教授	久保田	幸次
副査	教授	上見	練太郎
副査	教授	儀我	美一
副査	教授	小澤	徹
副査	助教授	神保	秀一

学位論文題名

Global existence of classical solution of Cauchy problem for nonlinear wave equation

(非線型波動方程式に対する初期値問題における古典解の存在定理)

近年、非線型波動方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在定理に関する研究が盛んに行なわれている。しかし、その多くは低次元空間における古典解及び高次元空間における弱解の存在定理の証明を目的としており、高次元空間における古典解の時間大域的な挙動は未開拓の分野で、今後の発展が待たれている状況にある。

本論文は、このような状況にある高次元空間の場合について、基本解の具体的な表示式を用いて、古典解の微分可能性と減衰評価に関して、初期値が球対称で空間次元が奇数という仮定のもとに研究し、古典解の時間大域的挙動の解析上の有益な指針を得ることを目的として取り組まれたもので、未知の実数値関数 $u(x, t)$ に対して次の初期値問題を古典解の範疇で考察している。

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(u, \partial_t u, \nabla u) \quad \text{in } R^n \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in R^n. \quad (2)$$

ここで、 F は原点近傍で p 次の多項式的に振舞う実数値関数であると仮定する。また、一般的に議論を展開するため初期値にはある意味での小ささを課す。

さて、存在定理の証明は次のような初期値問題 (1), (2) に対する線形化問題の不動点を見つける問題に帰着される。

$$\partial_t^2 u - \Delta u = F(v, \partial_t v, \nabla v) \quad \text{in } R^n \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{for } x \in R^n. \quad (4)$$

著者の仕事の独創的な点は、初期値が球対称で空間次元が奇数の場合に、この線形化問題を、いわゆる derivative loss を生じさせることなく解くための定式化を行なったことである。更に F が未知関数自身のみを含むような場合には F の微分可能性が一回しかない時にも同

様の定式化が可能である.

これを要するに, 著者は, 初期値が球対称で空間次元は奇数である場合について古典解の時間大域的な挙動の新知見を得たものであり, 今後の一般論の展開に対して貢献するところ大なるものがある.

よって著者は, 北海道大学博士(理学)の学位を授与される資格あるものと認める.