博士（理 学） 大 沼 正 樹

学 位 論 文 題 名

Viscosity solutions of Singular degenerate parabolic equations

（特異退化放物型方程式の粘性解）

学位論文内容の要旨

現象を表す方程式の中には2階の拡散方程式でありながら方程式が非線形であるばかりでなく特異点を持つ場合が多くある。本研究の目的はこのような特異点を持つ方程式の初期値（境界値）問題に対して、連続な時間大域的一意弱解を構成することである。特に本研究で対象となる方程式は退化放物型と呼ばれるクラスである。退化放物型方程式に対しては一般に古典解は期待できない。そこで1983年にCrandall-Lionsにより導入された粘性解という弱解を考えるのが自然である。本研究では

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in} \quad Q := (0,T) \times \Omega \tag{1}$$

（ただしΩは$\mathbf{R}^n$の領域、$u_t = \partial u/\partial t$、$\nabla u = \mathrm{grad}u$、$\nabla^2 u$は$u$のヘッセ行列である。）を解析する。本研究では常に$F = F(q,X)$が退化楕円型であることを仮定する。$F$が退化楕円型であるとき(1)を退化放物型方程式と呼ぶ。

第1章では、Fが$q=0$を含む有限個のqの方向で不連続になる退化放物型方程式を解析した。既知の研究としてはChen-Giga-Goto又はEvans-SpruckによりFが$q=0$で不連続である場合がある。彼らはFが$(q,X)=(0,O)$で連続に拡張可能という仮定を与えることにより(1)の粘性解の比較定理の証明に成功した。そしてその比較定理を応用することにより(1)のコーシー問題（初期値問題）の連続な時間大域的一意弱解の構成に成功した。本研究の結果としてはFに対して$F(q,X)$が不連続となる有限個の方向$q = q_1, \cdots, q_m$での適当な仮定を与えることにより(1)の粘性解の比較定理の証明に成功した。これは先の既知の結果の拡張になっている。粘性解のテスト関数としてミンコウスキー関数を導入したことが証明の成功の鍵である。そして比較定理を応用することにより(1)のコーシー問題の連続な時間大域的一意弱解の構成に成功した。

このような特異退化放物型方程式を解析する動機は以下の曲面の発展方程式の時間大域的一意弱解を構成するためである。

$$V = \frac{1}{\beta(\boldsymbol{n})}\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}(\boldsymbol{n})\right) + c\right) \tag{2}$$

ここで考えている曲面は、D_tを時刻tによる$\mathbf{R}^n$の有界開集合としたときD_tの境界として表されているとする。それをΓ_tと記述する。今、$\boldsymbol{n}$はΓ_tの外向き単位法ベクトルであり、$V = V(t,x)$は$x \in \Gamma_t$での$\boldsymbol{n}$方向の速度である。また、βは$\mathbf{R}^n$の単位球面上の正値関数、

Hは正斉次一次な関数、cは定数である。材料科学ではβは動的係数、Hは表面エネルギー密度を表す。βと Hはどちらも曲面の運動の非等方的性質に強く関係する。曲面の運動方程式を解析する方法として、Chen-Giga-Goto 又は Evans-Spruck により導入された「等高面の方法」を用いることは曲面に特異点発生の後も解を追跡できるので有用である。本研究では空間 2 次元の場合 (2) の $H = H(q)$ が有限個の qの方向で C^2でない場合について解析した。解析の方法は (2) に等高面の方法を用いて等高面方程式を導出する。そのとき、その等高面方程式は先に解析した (1) に含まれる式となっている。(1) の研究を応用することにより (2) の時間大域的一意弱解の構成に成功した。

第 2 章では

$$u_t + F(\nabla_{x,r}u, \nabla^2_{x,r}u) - \frac{\nu u_r}{r^\beta} = 0 \quad \text{in} \quad Q := (0,T) \times \Omega \times (0,R) \tag{3}$$

$$-u_r = 0 \quad \text{in} \quad S := (0,T) \times \Omega \times \{0\} \tag{4}$$

(ここでΩは $\mathbf{R}^m$ の領域、$\beta \geq 0$ のパラメータ、$\nu > 0$ な定数、$u_r = \partial u/\partial r$、$\nabla_{x,r}u = (\nabla_x u, u_r)$、$\nabla^2_{x,r}u$ は空間変数 (x,r) についての u のヘッセ行列とする。) を解析する。本研究では $F = F(q,X)$ が $q = 0$ で不連続な関数とする。(3) は $q = 0$ で不連続なだけでなく、空間変数 $r = 0$ でも不連続である。特に $r = 0$ のときが大きな困難となる。これを克服するために (3) の両辺に r^β をかけて rをゼロにしたときの極限方程式として得た (4) を $r = 0$ での満たすべき方程式とする。そして (3)、(4) に対して粘性解を定義した。結果として Fが $(q,X) = (0,O)$ で連続拡張可能なことを仮定することにより、Ωが有界領域のとき粘性解の比較定理の証明に成功した。(3) を解析する動機として

$$v_t - \frac{v_{xx}}{1+v_x^2} + \frac{1}{v^\beta} = 0 \quad \text{in} \quad (0,T) \times (-L,L) \tag{5}$$

(ここで $L > 0$ 定数、$v : (0,T) \times (-L,L) \to [0,\infty)$ である。) の解の延長問題がある。(5) は $v = 0$ では定義されない。本研究では解 vを滑らかな曲線とみなすことにより、その曲線の運動方程式を導出する。その等高面方程式は (3) に含まれる。本研究は (3) の解析を応用することにより (5) の解の延長問題を考える準備にあたる。また、(1) の F について軸対称変換不変という仮定を与えると (3) の形の方程式を得る。(ここで (3) の Fと (1) の Fとは違うものである。) 一般に (1) の軸対称解は (3) の解となることが期待される。本研究では粘性解の意味でも (1) の軸対称解が (3)、(4) の解となることを証明した。

第 3 章では

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in} \quad (0,T) \times \Omega \tag{6}$$

(ここで $p > 1$ とする。) を解析した。(6) は (1) に含まれる形であり、$F = F(q,X)$ は $q = 0$ で不連続である。しかし、ここで表現される Fは $(q,X) = (0,O)$ で連続に拡張することができない。本研究では粘性解のテスト関数を適当に制限することにより $p > 1$ のとき (6) の比較定理の証明に成功した。さらに $1 < p \leq 2$ のとき (6) のコーシー問題について、その初期値が有界一様連続のとき (6) の解が有界一様連続でかつ時間大域的一意に存在することを証明した。実はこの問題に対しては超関数の意味の弱解を用いての研究はよくされており、本研究の存在定理も解の定義は異なるが本質的には既知である。しかし、従来の解の構成方法は Harnack 不等式を始め多くのアプリオリ評価を用いる必要があり、連続な解を構成するまでに長い手順が必要である。本研究では粘性解の性質をうまく使うことにより手短に連続な弱解を構成することが可能である。また、超関数の意味の弱解を定義するためには方程

式についての変分構造が必要であった。本研究の粘性解を用いた議論にはそのような変分構造を必要としない。以上の議論により (1) で曲面の等高面方程式及び (6) を含むような幅広いクラスの方程式に対しても連続な時間大域的一意弱解を構成することに成功した。

学位論文審査の要旨

主 査　教 授　儀 我 美 一
副 査　教 授　上 見 練太郎
副 査　教 授　久保田 幸 次
副 査　教 授　小 澤 　 徹
副 査　助教授　神 保 秀 一

学 位 論 文 題 名

Viscosity solutions of Singular degenerate parabolic equations

(特異退化放物型方程式の粘性解)

現象を表す方程式の中には2階の拡散方程式でありながら、方程式が非線形であり、かつ特異点を持つ場合が多くある。著者は特異点を持つ退化放物型方程式の初期値（境界値）問題に対して比較原理を示すことを第一の目的にしている。それを用いて連続な時間大域的な弱解を構成することを第二の目的にしている。退化放物型方程式については、データがどんなに滑らかであっても、滑らかな解は必ずしも存在しない。したがって微分できない解の概念を導入する必要がある。このために粘性解が導入された。しかし、特異退化放物型方程式に対しては問題ごとに適切に定義する必要がある。本論文の中では3つのタイプの異なる特異退化放物型方程式が扱われている。

まず最初に、異方性のある曲率流方程式の等高面方程式について解析している。この種の方程式は、表面エネルギーが滑らかな場合はよく調べられている。しかし表面エネルギーが弱い特異点を持つ場合、従来の理論は適用できなかった。著者は巧みな試験関数を構成することにより、比較原理を示した。さらに大域的一意弱解を構成し、この状況に対しても等高面の方法が拡張できることを示した。この研究により異方性のある曲率流方程式の理論が大きく進歩した。異方性のある曲率流方程式は材料科学で再結晶に際しての粒界の運動を記述するものとして重要である。本研究の成功により等高面の方法により時間大域的に運動が解析的に追跡できるようになり、応用上も重要である。同様な研究は米国でもその後発表されているが、著者の方法がより見通しがよい。この研究は佐藤元彦氏（都立大・理）との共著論文として既にDifferential and Integral Equations に出版され高く評価されている。

次にいわゆるクエンチング問題の等高面方程式の解析を行っている。ここでクエンチングとは、非線形放物型方程式で非線形の吸引効果が強く、有限時間で関数がゼロに達し、方程式が意味を持たなくなってしまうことをいう。（関数が無限大に達する場合は爆発問題と呼ばれている）。同種の問題が軸対称曲面の平均曲率による運動方程式の等高面方程式としてもあらわれる。この問題では空間変数に対して方程式が特異になる。このような方程式に対して粘性解の概念を導入し、比較原理を示した。また等高面方程式の球対称解が著者の意味で解になっていることも示した。この結果はHokkaido Mathematical Journa

1に出版予定である。本研究は先駆的で放物型方程式の大域弱解を構成する一段階として重要である。

最後にいわゆるp－ラプラス拡散方程式についての解析を行っている。この方程式は$1<p<2$では未知関数の勾配ゼロのところで特異性があり、従来の粘性解の理論では取り扱えなかった。これに対して粘性解の概念を拡張することにより、比較原理を確立し、また有界一様連続な初期値に対して連続な大域弱解を構成した。p－ラプラス拡散方程式は超関数の意味の弱解が構成されているが、その連続性を示すのは困難であった。粘性解の理論を用いると容易に連続な解が構成できる。また、方程式の変分構造も不要になる。この理論は広いクラスの方程式に適用できる。

以上、本研究は非線形偏微分方程式論の中での粘性解理論の発展に大きく貢献している。特に適用範囲を広げている。

よって著者は、北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があると認める。