

学 位 論 文 題 名

Existence and structure of infinitely degenerate
zero-energy ground states of a Wess-Zumino-type
model in supersymmetric quantum mechanics

(Wess-Zumino の超対称性量子力学のモデルにおける無限重に
縮退した 0 エネルギー基底状態の存在とその構造)

学位論文内容の要旨

超対称性の概念は基本相互作用を記述する量子論において導入され、量子力学と数理論理においてハミルトニアンと楕円複体の位相的性質の研究の基礎となっている。特に非自明な Witten 指数 $\Delta_W(H)$ をもつ超対称的ハミルトニアン H の研究は重要である；古典的 Hodge-de Rham 理論によると、滑らかな計量をもつコンパクトなリーマン多様体上の形式の空間上の Laplace 作用素の Witten 指数はその多様体の Euler 数に等しい。本研究で扱う $N=2$ Wess-Zumino の量子力学のモデルの超対称的ハミルトニアン H は非自明な Witten 指数をもつ例であり、様々な視点から研究がなされて続けている。

本研究ではハミルトニアン H を $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^4)$ 上の自己共役な二階線形微分作用素として定義し、その H の 0-固有空間の構造の解析を行う。Witten 指数 $\Delta_W(H)$ は H の 0-固有空間の構造により定まる。このモデルの H の固有値問題は解けているというには程遠いのであるが、0-固有空間については超対称性のおかげで精密に解けている例がいくつか知られている。超対称性によりこのモデルには supercharge と呼ばれる自己共役な一階線形微分作用素 Q があり、線形作用素 Q_- を

$$Q_-: \mathcal{H}_- = L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{H}_+ = L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^2), \quad Q_- = \begin{pmatrix} i\partial V & -\partial \\ -\bar{\partial} & -i(\partial V)^* \end{pmatrix}$$

(ここで、 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ 、 ∂ は $z \in \mathbb{C}$ についての正則微分、 V は複素数値関数 $V(z)$ の掛算作用素とする) とおくと

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_- \\ Q_-^* & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。この Q を用いて

$$H = Q^2 = \begin{pmatrix} Q_-Q_-^* & 0 \\ 0 & Q_-^*Q_- \end{pmatrix}$$

とハミルトニアン H を書き下すことができる。関数 $V(z)$ は superpotential と呼ばれる。このとき

$$\Delta_W(H) = n_b - n_f, \quad n_b = \dim \ker Q_-^*, \quad n_f = \dim \ker Q_-,$$

となる。知られていた結果とは次の3通りである：

(V1) $V(z)$ が z の多項式のとき、 $n_b = \deg V - 1$;

(V2) $V(z) = \lambda z^{-p}$ 、 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 、 $p \in \mathbb{N}$ のとき、 $n_b = p - 1$;

(V3) $V(z) = \lambda e^{\alpha z}$ 、 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 、 $\alpha > 0$ のとき、 $n_b = \infty$.

であり、そしていずれの場合も $n_f = 0$ であると知られている。 $n_f = 0$ が成立することを消失定理が成立するという。これらの場合、 $\Delta_W(H) = n_b$ である。

さて、(V1) の特別な場合 $V(z) = \lambda z^p$ 、 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 、 $p \in \mathbb{N}$ 、と (V2) の場合は縮退した 0-固有空間の構造が詳しく調べられている：

- (1) ハミルトニアン $H_b = Q_- Q_-^*$ に対称群として作用する強連続な一変数ユニタリー群が存在する；
- (2) 対称群の生成子 L は純離散的なスペクトルと無限個の固有空間 $\mathcal{H}_n$ をもつ；
- (3) 有限個の $\mathcal{H}_n$ のなかにのみ、 H_b は、したがって H は各 $\mathcal{H}_n$ に 0-固有ベクトルをただ一つもつ。そのような $\mathcal{H}_n$ の個数が n_b である；
- (4) H_b は全ての $\mathcal{H}_n$ に、したがって無限個の一般化 0-固有ベクトルをもつ。

しかし、(V3) の場合にはその縮退している 0-固有状態が (V1) や (V2) と同様の構造を持つかどうか知られていなかった。その判定は (V1) (V2) で知られる構造が $N=2$ Wess-Zumino の量子力学のモデルの超対称的ハミルトニアンが共通してもつ特徴の反映であるかどうかという観点からも興味深い。

本研究では (V3) の場合を含む superpotential のクラス V_0 に含まれる V の場合のモデルについて (V1) (V2) と類似の構造の存在を示した：

- (1') ハミルトニアン $H_b = Q_- Q_-^*$ に対称群として作用する強連続な一変数ユニタリー群が存在する；
- (2') 対称群の生成子 N は点スペクトルを持たないが、実数 $\mathbb{R}$ 全てが H_b の一般化された固有値である。そして N の全ての一般化固有空間 $\mathcal{H}_p$ 、 $p \in \mathbb{R}$ 、が H_b を“約”する；
- (3') $\mathbb{R}$ のある区間 I に属する $p \in I$ に対し、 H_b は $\mathcal{H}_p$ にただ一つの一般化された 0-固有ベクトルをもつ；
- (4') H_b の無限個の 0-固有ベクトルをもつ。(これは I が Lebesgue 測度が 0 でない、互いに共通部分を持たない無限個の部分区間に分割できることの反映である)。
- (5') H_b は無限個の一般化 0-固有ベクトルをもつ。

さらに、 V_0 のある部分集合 ((V3) を含む) に属する superpotential のモデルに対し、消失定理、すなわち $n_f = 0$ が成立することを示した。(V3) の場合の解析は、生成子 N のスペクトルが (V1) (V2) の場合の生成子のものと異なることが原因でより複雑であった。具体的には、全ての $p \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{H}_p$ が $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ と見なせることを利用してヒルベルト空間上の作用素に対する constant fiber direct integral decomposition (CFDID) の方法を用いた。各 $\mathcal{H}_p$ を一つの fiber と考えて H_b をその上の作用素に“約”し (分解し)、その 0-固有ベクトルを求め、そこから H_b の 0-固有ベクトルを構成したのである。消失定理に

ついても、ハミルトニアン $H_f = Q_-^* Q_-$ に対する対称群の生成子を見つけて CFDID の方法を用いることにより証明した。

すなわち、本研究で (V1) (V2) (V3) の全てに共通する N=2 Wess-Zumino の量子力学のモデルの超対称的ハミルトニアン H_f の構造の存在が示された。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 新 井 朝 雄

副 査 教 授 上 見 練太郎

副 査 助教授 三 上 敏 夫

副 査 助教授 岩 田 耕一郎

学 位 論 文 題 名

Existence and structure of infinitely degenerate
zero-energy ground states of a Wess-Zumino-type
model in supersymmetric quantum mechanics

(Wess-Zumino の超対称性量子力学のモデルにおける無限重に
縮退した 0 エネルギー基底状態の存在とその構造)

近年, 新しい型の量子力学モデルとして, 超対称性をもつ量子力学, すなわち, 超対称的量子力学(SSQM)に関する研究が盛んに行われている. SSQMは, 超対称電荷とよばれる作用素と, これと反可換な次数作用素 (grading operator) によって特徴づけられる. ハミルトニアンは超対称電荷の 2 乗によってあたえられる. SSQM のモデルのうちでもっとも興味があるものとして, Wess-Zumino モデルとよばれるものがある. これは, 状態のヒルベルト空間を $L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^4) = L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^2) \oplus L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^2)$ として, 超対称性電荷 Q および次数作用素 Γ が, それぞれ,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_- \\ Q_-^* & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} i\partial V & -\partial \\ -\bar{\partial} & -i(\partial V)^* \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

によってあたえられるモデルである. ここで, $\partial = \partial/\partial z, z \in \mathbb{C}$, V は $\mathbb{C}$ 上の複素数値関数 (超ポテンシャルとよばれる), ∂V は関数 ∂V によるかけ算作用素である. ハミルトニアンは $H := Q^2 = H_b \oplus H_f$ となる. ただし, $H_b = Q_- Q_-^*, H_f = Q_-^* Q_-$. 数学的にも物理的にも特に興味があるのは, $Q\psi = 0$ となる状態 $\psi \in L^2(\mathbb{C}; \mathbb{C}^4), \psi \neq 0$, である. このような状態は超対称的状态とよばれる. したがって, $\ker Q$ の構造が問題になる. $\ker Q = \ker H = \ker H_b \oplus \ker H_f$ であることに注意すると, 超対称的状态はハミルトニアンの零エネルギー状態であることがわかる. $n_b = \dim \ker H_b, n_f = \dim H_f$ とすれば, $\dim \ker H = n_b + n_f$. これまでに次の結果が知られている: (V1) $V(z)$ が多項式のとき, $n_b = \deg V - 1$; (V2) $V(z) = \lambda z^{-p}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, p \in \mathbb{N}$, のとき, $n_b = p - 1$; (V3) $V(z) = \lambda e^{\alpha z}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha > 0$ のとき, $n_b = +\infty$. いずれの場合でも, $n_f = 0$ である.

本論文は, 上記 (V3) の場合を含む超ポテンシャルの一般的なクラス V_0 に関して, H および零エネルギー基底状態空間 $\ker H$ の構造を詳しく解析し, 次の結果を得ている: (i) H_b に対称群として作用する強連続な 1 パラメーターユニタリ群が存在する; (ii) 対称群の生成子 N は点スペクトルを持たないが, 実数全体が N の一般化された固有値である. N のすべての一般化固有空間 $\mathcal{H}_p, p \in \mathbb{R}$, は H_b を “約する”; (iii) $\mathbb{R}$ のある区間 I に属する任意の p に対して, H_b は $\mathcal{H}_p$ にただ

ひとつの一般化された 0-固有ベクトルをもつ; (iv) $n_b = +\infty$; (v) H_b は無限個の一般化 0-固有ベクトルをもつ; (vi) V_0 の部分集合 (V_3) の場合を含む) に対して, $n_f = 0$ が成り立つ.

これらの結果は, ある一般的なクラスの超ポテンシャルのクラスに関する, Wess-Zumino モデルのハミルトニアンならびにその零エネルギー基底状態の無限縮退の構造を明らかにするものであり, 超対称的量子力学の数学的研究に寄与するところ大なるものがある. また, 純数学的に見ても, ある種の Dirac 型作用素の核の構造を解明したことになり, 非コンパクト空間上の Dirac 作用素の理論に興味ある新しい知見をもたらしたといえる.

よって, 著者は, 北海道大学博士 (理学) の学位を授与される資格あるものと認める.