博士（工 学） 山 田 敏 清

学 位 論 文 題 名

Studies on Properties of a Finsler Space and Their Application

（フィンスラー空間の諸性質とその応用に関する研究）

学位論文内容の要旨

フィンスラー空間 $F^n=(M,L)$ とは，リーマン空間の概念を拡張したものであり，n 次元微分可能多様体 M で，その曲線 $x^i=x^i(t)$ の弧長 s が積分 $s=\int L(x(u),y)du$，$(y=dx/dy)$ で与えられたものある．この積分がパラメター u のとり方に無関係であるためには，$L(x,y)$ は，y に関して正斉１次であることが仮定される．

この空間の応用としてつぎのような研究が行なわれている．河口・山ノ井等による基準面 $\{y \mid L(x,y)=1\}$ を利用した視空間の研究，また，点 x を固定すれば接空間 M_x は $L(x,y)$ が与えられたミンコフスキー空間となり，この空間の基準面を利用した佐藤による多次元尺度構成の研究がある．さらに，$\alpha=\{a_{ij}(x)dx^idx^j\}^{1/2}$ をリーマン計量，$\beta=b_i(x)dx^i$ を一次微分形式とした，ランダース計量 $L=\alpha+\beta$ とクロピナ計量 $L=\alpha^2/\beta$ の応用がある．前者は，Randers により時空における統一場理論の構築や，Ingarden により電子顕微鏡の球面収差の理論の構築に応用され，後者は，物理学における解析力学のラグランジュ関数および熱力学の理論に適用されている．松本によりこの二つの計量空間は $C_{ijk}(=\frac{1}{2}\partial^3L^2(x,y)/\partial y^i\partial y^j\partial y^k)$ が C-reducible という特殊なテンソル方程式を満たすことによって特性づけられることが示された．

本論文は，上に述べたような工学や物理学に応用範囲の広いフィンスラー空間の諸性質の研究とそれらの工学への応用を論じたものである．はじめに基準面とフィンスラー空間の関係，C-reducible の拡張である quasi-C-reducible 空間の考察，測地線の変換に関する射影変換の議論，およびリーマン空間でも重要であった超曲面の理論に考察を加えた．応用として，力学の運動方程式を与えるラグランジュ関数から具体的にフィンスラー計量を導き，幾何学的立場から力学系の運動を論じた．さらに，この理論を情報幾何学へ適用し，母数を含む多項分布の推定問題にフィンスラー空間の射影的性質を利用したボルツマンマシンにおける効率の良いの学習アルゴリズムについて論じた．

序章では，フィンスラー空間の基本的概念を論じ、本研究の目的を述べた．

第一章では，基準面 I_x を，接空間 M_x の $(n-1)$ 次元リーマン超曲面として捕らえ，そこにリーマン空間としての超曲面の理論を適用し，ガウスの方程式を導き，さらに I_x 上に接空間の曲率テンソルから作られる新たなテンソルの概念を導入し，それを利用して基準面とフィンスラー空間の関係を明らかにした．特に I_x が局所的に対称になるための必要十分条件を示

し, I_xが共形的平坦になる十分条件を与えた. またつぎに, 物理学や工学への応用から導出されたランダース計量, クロピナ計量を含む C-reducible 空間, semi-C-reducible 空間, quasi-C-reducible 空間の間の関係を解明した. さらに, quasi-C-reducible 空間が semi-C-reducible および C-reducible 空間に帰着するための十分条件を与えた.

第二章では, 測地線$\delta \int L du = 0$ から定まる Berwald の接続を用いて, ガウス曲率の一般化である断面曲率の概念をフィンスラー空間に導入し, これを用いてスカラー曲率の空間と定曲率空間を定義して, この二つの空間の間の関係を論じた. 二つのフィンスラー空間を $F^n(M,L)$, $\bar{F}^n(M,\bar{L})$ として $L \to \bar{L}$への計量の変換を行ったとき, L に関する測地線が$\bar{L}$で測った$\bar{F}^n$ の測地線になり, 逆もまた真であるとき, $F^n \to \bar{F}^n$ は射影変換と呼ばれる. 本章では変換が射影変換であるための必要十分条件を詳細に検討し, 射影変換により定曲率の空間がまた定曲率の空間に移るための条件を明らかにした.

第三章では, 超曲面上に intrinsic な Berwald 接続を導入し, リーマン空間の超曲面理論において成立する二つの重要な定理 「(A) 定曲率空間の全臍超曲面 (totally umbilical) は, また定曲率空間である.(B) 定曲率空間の全測地超曲面 (totally geodesic) は, また定曲率空間である.」 のフィンスラー空間への拡張を試み肯定的結果を得た.

第四章では, フィンスラー空間の応用について考察し, 本研究との関連について述べたものである. その中で, 特にフィンスラーの基本関数 L から, 力学系におけるラグランジュ関数 L^*が導出され, L^*から L もまた可逆的に特別なクロピナ計量として構築できることを示した. このことより, ラグランジュ関数の考察は, このクロピナ計量を持ったフィンスラー空間の研究に還元され, 運動や物理現象の幾何学的取り扱いが可能であることが明らかになった. さらに, この議論を情報幾何学として定式化し, 母数を含む多項分布の推定問題を取り上げ, 上に述べたラグランジュ関数からフィンスラー計量を求める手法および射影変換の理論を駆使して, この多項分布の空間をユークリッド空間の中のリーマン超球面とみなし, この幾何学的構造を利用することによって, より自然な推定方式を得ることができた. また, これをボルツマンマシンの学習に応用した. 従来の学習アルゴリズムは基本的に gradient 法を用いて行なわれているが, 本章では母数空間の幾何学的性質を利用することにより, 効率の良い学習方式が得られ, 収束に必要な反復回数は従来のアルゴリズムよりはるかに小さいことが実験的にも明らかにされた.

終りに結論を述べ, 従来論じられているリーマン空間は工学的な応用の立場からみると, いわゆる線形近似理論であるの対し, フィンスラー空間はさらに微分のオーダーが 1 次高く非線形性を許容する理論であると考えられ, それに基づく応用可能性を論じ, 本研究の意義を明らかにしたものである.

学位論文審査の要旨

主査　教授　佐藤義治
副査　教授　新保　勝
副査　教授　伊達　惇
副査　教授　島　公脩

学位論文題名

Studies on Properties of a Finsler Space and Their Application

（フィンスラー空間の諸性質とその応用に関する研究）

最適化理論や学習理論における最適性の定義において、対象間や状態間の距離の概念が重要な役割を果たしている。距離の概念を体系的に扱う学問として計量幾何学があり、これをさらに一般的な多様体上で論じたものとして計量微分幾何学が知られている。その代表的なものとして、アインシュタインの一般相対性理論として注目されたリーマン幾何学がある。リーマン空間とは、二点間の無限小距離が座標の微分の二次形式の平方根で与えられる特殊な計量を持った空間であるが、本論で展開したフィンスラー空間とは、この無限小距離 ds をより一般的な基本関数 $L(x^1, x^2, \cdots, x^n, dx^1, dx^2, \cdots, dx^n)$ で測ろうとするものである。その意味においてフィンスラー空間は、リーマン空間をさらに拡張した空間と見なすことができる。

近年、フィンスラー空間は、G.Randers が統一場理論の構築に利用して以来、工学や物理学の分野の中で様々な形で展開されている。例えば、Ingarden による電子顕微鏡の収差の問題、熱力学へのクロピナ計量の応用、Antonelli と島田による進化と発生の生物学への応用、河口達による視空間の応用、更には、佐藤による多次元尺度構成の応用等がある。

本論文は、上に述べたような工学や物理学に広く応用されているフィンスラー空間の諸性質の研究とそれらの工学への応用を論じたものである。フィンスラー空間の特性としては、基準面とフィンスラー空間の関係、C-reducible 空間の拡張である quasi-C-reducible 空間の考察、測地線の変換に関する射影変換の議論、さらに超曲面の理論に考察を加えている。また、この空間の応用として、力学系の運動方程式を与えるラグランジュ関数から具体的にフィンスラー計量を導き、フィンスラー空間としての諸性質を利用して、力学系における運動を幾何学的立場から論じている。さらに、このラグランジュ関数とフィンスラー計量のもつ対応関係を情報幾何学に適用し、射影変換の議論を駆使して、母数を含む多項分布の推定問題およびボルツ

マンマシンの学習アルゴリズムについて論じている。

序章では、フィンスラー空間の基本的概念を概説し、従来の知られている結果と本研究との関連性を明らかにすると同時に、応用への可能性を指摘し本研究の目的を明確にしている。

第一章では、基準面 I_x をフィンスラー空間 M の接空間の超曲面としてとらえ、I_x 上に接空間の曲率テンソルから作られる新たなテンソル T^5 を導入し、それを利用して I_x の構造を規定する定理として、特に I_x が局所的に対称になる必要十分条件、共形的に平坦になる十分条件を与えている。このことは、フィンスラー空間 M のもつ基本関数 L の構造を間接的に決定することになる。さらに、物理学や工学への応用から導出されたランダース計量とクロピナ計量を含む C-reducible 空間について詳細に論じている。第二章では、フィンスラー空間の特殊空間としての、スカラー曲率の空間と定曲率の空間の間の関係を調べている。一般に定曲率の空間はスカラー曲率の空間であるが、逆は必ずしも真ではない。そこで本研究では、スカラー曲率の空間が定曲率の空間になるための必要十分条件を与えている。さらに、射影変換に関して、定曲率の空間が定曲率の空間に移るための条件を詳細に検討し、明らかにしている。

第三章では、特に、フィンスラー空間の全臍超曲面の定義を与え、定曲率空間の全臍超曲面はまた定曲率空間であるという定理を述べている。

第四章では、フィンスラー空間の応用について考察し、本研究との関連について述べている。力学系における運動は、ラグランジュ関数 L^* の満たす Euler-Lagrange の微分方程式によって規定されるが、この L^* からフィンスラー計量 L が構築できることを示し、運動が、この L を計量にもつ特別なクロピナ空間としての幾何学的研究に還元できることを明らかにしている。特に、力学系におけるラグランジュの運動方程式の表す軌道は、フィンスラー空間の測地線と一致することを主張している。さらに、この議論を情報幾何学として定式化し、母数を含む多項分布の推定問題に、ラグランジュ関数からフィンスラー計量を得る手法及び射影変換の議論を用いて、多項分布の空間を幾何学的にとらえ、より自然な推定方式を確立している。またこの方式をボルツマンマシンの学習に応用し、従来の学習アルゴリズム (gradient 法) より効率の良い学習方式が提案され、実験的にも効果的であることが立証されている。

これを要するに、著者は、最近、工学の分野のみならず諸分野において注目されているフィンスラー空間の基礎理論を展開し、統計的推定問題やニューラルネットワーク理論の情報幾何学的取り扱いについて多くの新知見を得たものであり、情報解析学およびニューラルネットワークの学習理論等の発展に寄与するところ大である。

よって著者は、北海道大学博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。