博士（理学） 榊 原 暢 久

学位論文題名

Perfectness and semiperfectness of abelian $*$-semigroups

(可換$*$半群の完全性及び半完全性)

学位論文内容の要旨

古典的なモーメント問題によれば，数列が非減少有界変動関数のモーメント関数の形でかけることと，この数列を非負整数半群$\mathbb{N}_0$上の核とみて正定値であることは同値である．上記の関数をより一般的に，可換$*$半群上の正定値関数と，指標半群上の正則ボレル測度でかけるモーメント関数とみて，正定値関数がいつもモーメント関数であるような可換$*$半群を半完全，その表現測度がいつも一意に定まるとき完全であるという．可換$*$半群の完全性・半完全性の概念は1984年前後にC.Berg，P.Resselらが導入し，彼らの影響の下にT.M.Bisgaard及び申請者がその解析に努めている．この研究における最大の目標は完全性・半完全性を特徴付けることにあるが，非負有理数半群$\mathbb{Q}_+$の部分半群についてさえ満足すべき結果にまで達していない．本論文では未解決であった問題のうち，$\mathbb{N}_0$の有限個の直積$\mathbb{N}_0^k$の部分半群，及び整数半群$\mathbb{Z}$（但し，$*$構造は恒等的）の有限個の直積$\mathbb{Z}^k$の部分半群において完全性・半完全性を完全に特徴付ける．更に，単位元をもつ可換$*$半群の完全性と，単位元をもたない可換$*$半群の完全性についての関係を導く．

完全性については，種々の良い性質や十分条件が与えられている．Y.Nakamura及び申請者(1990)は完全な可換＊半群のイデアルに単位元を付加してできる＊部分半群が完全になることを示している．ところがこの完全性についての保存的性質は半完全性については成立しない．例えば，$\mathbb{N}_0$は半完全であるが，その部分半群$\mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$は半完全でないことが同じ論文の中で示されている．このことから，$\mathbb{N}_0^k$の部分半群のうち完全・半完全である部分半群は如何なるものであるかを考えることは自然なことである．本論文の第1の主要な定理（Theorem4.1）では，$\mathbb{N}_0^k$の部分半群Sのうち半完全な半群は自明な半群か一元で生成されるものしかなく，そのうち完全な部分半群は自明な半群のみであることを示している．1次元の場合，部分半群Sが自明でも一元生成でもなければ，半完全な部分半群の＊準同型写像による像が半完全であることから，Sの指標が決定できる場合に帰着できる．一般にS上の指標半群がSの点を分かつなら，指標半群上のpoint evaluationの線形和全体からなる線形空間$V(\mathbb{R})_S$において，$V(\mathbb{R})_S$の非負元からなる凸錐$V(\mathbb{R})_{S+}$と，$V(\mathbb{R})_S$の元の平方和からなる凸錐Σ_Sを考えると，Sの半完全性の必要条件として，$V(\mathbb{R})_{S+}$がΣ_Sの閉包であることがわかる．今，Σ_Sは閉凸集合となり，$V(\mathbb{R})_{S+} \setminus \Sigma_S$が空でないことを示す例がわかるのでSは半完全でないことがわかる．2次元の場合，Sが自明でない半完全な部分半群だとすると，半完全な部分半群の＊準同型写像による像が半完全であり，$\mathbb{N}_0^2$が半完全でないことから，Sが一元生成であることに帰着する．3次元以上の場合は2次元の場合に帰着できるので，定理が示されることとなる．

$\mathbb{N}_0^k$の部分半群の完全性・半完全性が完全に特徴付けられたことから，$\mathbb{Z}^k$の部分半群において完全性・半完全性が如何なるものであるかを考えるのは当然であり，本論文の第2の主要な定理（Theorem5.1）としてこの問に対する解答を与えている．$\mathbb{N}_0^k$と同様に，$\mathbb{Z}^k$の半完全な部分半群は自明な半群か一元で生成されるものであり，完全な部分半群は自明な半群のみである．但し，この場合の一元生成とは，$\mathbb{N}_0^k$においては$\mathbb{N}_0$と同型であるということなのに対して，$\mathbb{N}_0$あるいは$\mathbb{Z}$と同型であるという意味で用いる．

一般に，Sの部分半群XにおいてSの元の和s＋tがXの元であるなら，sとtはXの元となるようなXはfaceと呼ばれる．半完全な半群SのfaceであるXは半完全となり，Sが完全であることと，X及び（S＼X）⋃｛0｝が完全であることは同値であることがわかる(Theorem3.1)．この系として，Sの逆元全体をΓとしたとき，Sが半完全ならΓは半完全，Sが完全であることとΓ及び（S＼Γ）⋃｛0｝が完全であることは同値であることがわかる(Corollary3.3)．Theorem5.1は1次元の場合は自明であり，3次元以上の場合はTheorem4.1と同様であるので2次元の場合が本質的である．2次元の場合，自明でない半完全な部分半群Sの逆元全体Γは半完全であるが，$\mathbb{Z}^2$の部分群は本質的に，自明な半群と$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}^2$であり，$\mathbb{Z}^2$は半完全でないことから，Γは自明な半群あるいは$\mathbb{Z}$と同型となり，結果としてSは$\mathbb{R}^2$の半平面に含まれる．

Sが$\mathbb{R}^2$における角度π未満の扇形に含まれれば$\mathbb{N}_0^2$の部分半群の議論に帰着するので，このような扇形に含まれない場合，Sが半完全とならないことを示す．このときいくつかの場合分けを要するが，いずれの場合も指標の形が定まり，Theorem4.1の1次元の場

合の手法を用いて半完全でないことが示される.

完全性・半完全性の定義は単位元をもたない＊部分半群$H=S\setminus\{0\}$（形式的には単位元をもたないと仮定する必要はない）についても，H上の正定値関数がH＋Hの各点においてHの指標半群上のモーメント関数の形でかけるときHが半完全であるとし，表現測度がいつも一意に定まるとき完全であるとすれば可能となる．本論文の第3の主要な定理（Theorem6.1）は，$H=H+H$の仮定の下，Sが完全であることとHが完全であることが同値であることを示している．C.Bergら（1984）は＊構造が恒等的のとき，$H=H+H$の仮定の下，Sが完全であるならHも完全であると指摘している．申請者の定理はこれの拡張となっているが，Hの完全性からSの完全性が導かれることについても，$H=H+H$の仮定を使わずに示している．又，この定理の十分性の証明において$H=H+H$の仮定は必要不可欠であることを示す例を与えている（Remark6.5）．この例は，完全性におけるイデアルの保存性が単位元をもたない半群の場合には必ずしも成立しないということをも指摘している（Remark6.6）．

学位論文審査の要旨

主査　教授　安藤　　毅
副査　教授　岸本晶孝
副査　教授　中路貴彦
副査　教授　林　　実樹廣

学位論文題名

Perfectness and semiperfectness of abelian $*$-semigroups

（可換＊半群の完全性及び半完全性）

可換＊半群の上の関数に対しては自然に正定値性の概念が導入される。群の場合には，＊演算として逆元写像を考えると，普通の意味の正定値性になる。可換群の場合の類比から，可換＊半群に対してその指標半群が定義される。指標半群の上の正測度のモーメントとして表示される関数は明らかに正定値である。

可換＊半群上のモーメント問題と呼ばれるものは，どのような正定値関数が指標半群の上の正測度のモーメント関数になるかの解明を目標とする。

すべての正定値関数が正測度のモーメント関数となっているとき，その可換＊半群は半完全(semiperfect)であると言われる。更に各正定値関数に対して表現測度が一意的に決まるとき，その可換＊半群は完全(perfect)であると言われる。

一般に逆元写像を＊演算とする可換群は常に完全であることが知られている。したがって，整数のなす（加法）群 Z は完全である。しかし，Z に＊演算として恒等写像を付与したときは，Z は半完全であるが完全ではない。また，恒等写像を＊演算とする非負整数のなす（加法）半群 N_0 も半完全であるが完全ではないことが知られていた。

可換＊半群に関するモーメント問題の主要な目標の一つは，具体的な可換＊半群，およびその部分＊半群の完全性及び半完全性を特徴付けることにあるが，非常に具体的な半群に関しても解明されていることは僅かである。

この論文の前半で申請者は，未解決であった問題のうち，恒等写像を＊演算とする

非負整数のなす（加法）半群 N_0 の有限個の直積 N_0^k の部分半群，及びやはり恒等写像を $*$ 演算とする（加法）整数半群 Z の有限個の直積 Z^k の部分半群で完全性または半完全性をもつものを完全に特徴付けることに成功した。

すなわち，N_0^k の部分半群で半完全なのは，自明なものか，1個の元により生成されたものに限られること，および完全なものは自明な部分半群だけであることを示した。

1次元 N_0 の場合にこれは双対性を使った方法で確立されていたが，申請者はある種の写像を媒介として次元を下げて行く巧みな方法で証明に成功した。

Z^k についても結論は同じであるが，ここで1個の元により生成されることを N_0 あるいは Z と同型ということと理解する。

申請者は，これまでに完全または半完全な可換 $*$ 半群から自然な操作で作れる種々の $*$ 半群の完全性及び半完全性にも深い研究を行なってきた。完全性及び半完全性の概念は単位元を持たない可換 $*$ 半群についても考えられる。

その方向への発展として，この論文の後半で申請者は，可換 $*$ 半群 S から単位元0だけを除去した $H=S\setminus\{0\}$ を考察し，その完全性または半完全性を問題にした。そして，$H+H=H$ の仮定の下に，S の完全性と H の完全性が同値であることを証明した。

ここで表現測度の単一性の保証は，局所的に同一の測度を張り合わせていって全体に及ぼすという巧みな方法により成し遂げられた。

以上申請者の研究は，$*$ 半群上のモーメント問題に関して新しい重要な寄与をなすもので，博士（理学）の学位を得るにふさわしいものである。