

学 位 論 文 題 名

The structure of the core of a numerical contraction

(数域縮小作用素の核の構造)

学位論文内容の要旨

ヒルベルト空間上の数域縮小作用素とは数域半径が 1 以下の作用素を意味する。それに対して作用素ノルムが 1 以下の作用素は単に縮小作用素と呼ばれる。一般に作用素の数域半径はノルムをこえないため、縮小作用素は全て数域縮小作用素になることが知られている

T. Ando (1973) によってヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 T が数域縮小作用素になることと

$$\begin{bmatrix} I+Z & T \\ T^* & I-Z \end{bmatrix} \geq 0$$

をみたす $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 Z が存在することが同値であることが示されている。ここで自己共役作用素 Z に対して上の作用素行列が非負定値になることと T がある縮小作用素 K に対して $T = (I+Z)^{1/2} K (I-Z)^{1/2}$ と分解できることとは同値である。数域縮小作用素 T に対して上の条件をみたす自己共役作用素 Z の全体を $\mathcal{Z}(T)$ であらわしこれを T の核という。更に T. Ando によってこの核の中には最大元 $Z_{\max}(T)$ と最小元 $Z_{\min}(T)$ が存在し、これらがある自己共役作用素列の強収束の意味での極限として与えられることがわかっている。

ヒルベルト空間上の数域縮小作用素 T の構造を調べるためにはその核である $\mathcal{Z}(T)$ の構造を知ることが有用である。しかしながら現在まで数域縮小作用素の核については十分な研究が行われておらず、核がその中に最大元と最小元のほかにどんな作用素を含むかさえもわかっていない。本論文はこの核の構造の解明を目標としている。

M.A. Dritschel と H.J. Woerdeman (1994) は独自の方法によって有限行列の場合に数域縮小作用素の構造の研究を行った。彼らは radial tuple という概念を導入して、数域縮小作用素を具体的に radial tuple に分解しその構造の解明を目指している。彼らは数域縮小作用素全体の中で特に Agler boundary と呼ばれる部分に着目して、有界線形作用素 T が Agler

boundary に含まれるための必要十分条件が $Z(T)$ が一点からなる集合であることを示した。またその中で radial tuple を用いて数域縮小作用素全体の端点の特徴付けも行っている。しかしながら彼らの手法は有限次元ということに深く依存しており一般の無限次元のヒルベルト空間においてはそのままの形では使うことができない。本論文では彼らとは全く異なる方法により、有限次元性の制約を克服して、彼らの結果を無限次元のヒルベルト空間の場合に一般化することに成功している。

最初に核 $Z(T)$ が一点集合になるような数域縮小作用素 T の特徴付けを行った。具体的には $Z(T)$ が一点集合になることと $\begin{bmatrix} T & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ の形の拡張が数域縮小作用素になるのは $B = 0$ の場合に限ることとが同値であることを示した。ここで拡張の際現れる作用素 B は階数が 1 以下のものに限って検証すれば十分であることもわかる。さらにより検証しやすい条件として、全ての 0 でないベクトル $y \in \mathcal{H}$ に対して

$$\sup_x \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2 - |\langle Tx, x \rangle|} = +\infty$$

が成り立つこととも同値であることを示した。本論文では $Z(T)$ が一点集合にならないことと、分解 $T = (I + Z)^{1/2} K (I - Z)^{1/2}$ でそこに現れる K あるいは K^* が等距離作用素ではないようなものが存在することが同値であることに着目して証明した。

次に対象を縮小作用素に限ることによってその核についてより詳しい情報が得られることを示した。縮小作用素の場合はその核の最大元及び最小元を与える自己共役作用素列が比較的容易に計算できる。従って特別な性質を持つ作用素に対しては、その核の最大元及び最小元を具体的に求めることができる。

縮小作用素 T の場合はその核 $Z(T)$ に 0 が含まれることは容易にわかる。それに加えて作用素区間 $[0, I - |T|^2]$ と $[|T^*|^2 - I, 0]$ も核 $Z(T)$ に含まれることを示した。

正規作用素については作用素ノルムと数域半径は一致するため数域半径 1 以下の正規作用素は必然的に縮小作用素になる。正規縮小作用素 T についてはその核 $Z(T)$ の最大元と最小元は

$$\begin{aligned} Z_{\max}(T) &= (I - |T|^2)^{1/2} = (I - |T^*|^2)^{1/2}, \\ Z_{\min}(T) &= -(I - |T^*|^2)^{1/2} = -(I - |T|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

で与えられることを示した。そして逆に $(I - |T^*|^2)^{1/2} = Z_{\max}(T)$ あるいは $-(I - |T|^2)^{1/2} = Z_{\min}(T)$ の条件が T の正規性を保証することも示した。

等距離作用素 T に対してもその核の最大元と最小元は具体的に求めることができて

$$Z_{\max}(T) = 0, \quad Z_{\min}(T) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} T^{k-1} (I - TT^*) T^{*k-1}$$

となることを示した. この系として T が縮小作用素の場合にはその核 $Z(T)$ が一点からなること, すなわち $Z(T) = \{0\}$, となるのは T がユニタリ作用素の場合に限ることがわかる.

また T が正規縮小作用素の時には $Z(T)$ が作用素の区間になることすなわち $Z(T) = [Z_{\min}(T), Z_{\max}(T)]$ となるのは T が恒等作用素の定数倍あるいはユニタリ作用素あるいは恒等作用素の定数倍とユニタリ作用素の直和とユニタリ同値なものの 3 つの場合しかあり得ないことも示した.

ヒルベルト空間上の数域縮小作用素全体 $\mathcal{C}$ の端点については未だ見やすい形での特徴付けが得られていない. 数域縮小作用素 T が $\mathcal{C}$ の端点であればその核 $Z(T)$ は一点集合になることは容易にわかる. しかしながら逆は一般には成立しない. 数域縮小作用素 T の核が一点集合, すなわち $Z(T) = \{Z_0\}$ かつ $T = (I + Z_0)^{1/2} V (I - Z_0)^{1/2}$, のときは T が $\mathcal{C}$ の端点であるための必要十分条件は S を未知とする作用素等式

$$(I + Z_0)^{1/2} S (I + Z_0)^{1/2} + (I - Z_0)^{1/2} V^* S V (I - Z_0)^{1/2} = 0$$

が $S = 0$ 以外の自己共役作用素解を持たないことで与えられることを示し, この事実から検証しやすい形でのいくつかの十分条件を得ることに成功した.

数域縮小作用素 T の核 $Z(T)$ が一点集合であるとき, $\operatorname{Re}(e^{i\theta} T)$ が正定値作用素となるような $\theta \in [0, 2\pi)$ が存在するときには T が $\mathcal{C}$ の端点であることを示した. 更に縮小作用素 T の核が一点集合であるとき, すなわちユニタリ作用素であるとき, 任意の 2 つのスペクトル $\lambda, \mu \in \sigma(T)$ に対して $\bar{\lambda}\mu \neq -1$ が成立していれば T が $\mathcal{C}$ の端点になることも示した.

学位論文審査の要旨

主査	教授	安藤	毅
副査	教授	岸本	晶孝
副査	教授	中路	貴彦
副査	教授	林	実樹廣

学位論文題名

The structure of the core of a numerical contraction

(数域縮小作用素の核の構造)

ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 T が数域縮小作用素になることと

$$\begin{bmatrix} I+Z & T \\ T^* & I-Z \end{bmatrix} \geq 0$$

を満たす H 上の自己共役作用素 Z が存在することが同値であることが Ando (1973) により示された。

申請者はこの条件を満たす Z の全体を $\mathcal{Z}(T)$ であらわし数域縮小作用素 T の核 (core) と呼んだ。核の中には最大元 $Z_{\max}(T)$ と最小元 $Z_{\min}(T)$ が存在することは知られているが、それ以外のことは殆ど判っていなかった。申請者は、核 $\mathcal{Z}(T)$ を調べることは T 自身の解明につながるという立場から、核の構造の解明を中心課題として取り上げた。

最近 M.A. Dritschel と H.J. Woerdeman は独自の方法によって、有限行列の場合に数域縮小作用素の研究を行なった。彼らは radial tuple という概念を導入して、数域縮小作用素を radial tuple に分解することにより、その構造を解明している。しかし彼らの基本的な手法は次元に基づく帰納法であり、有限次元性が必須の条件となっている。

申請者は、彼らとは全く異なる方法により、有限次元性の制約を克服して、対応する結果を無限次元のヒルベルト空間の場合に一般化することに成功した。

最初に核 $\mathcal{Z}(T)$ が 1 点集合になる数域縮小作用素 T の特徴付けを行なった。そして、これに対応する T 自身の条件は $\begin{bmatrix} T & B \\ 0 & T \end{bmatrix}$ がまた数域縮小作用素になるのが $B=0$ の場合

に限るということを見いだした。これは、核 $Z(T)$ が 1 点集合でないことは、核の元 Z を使って $T = (I + Z)^{1/2} K (I - Z)^{1/2}$ と表示したとき、 K または K^* が等距離作用素でないものが存在することと同値であることに着目した巧妙な方法で達成された。

次に対象となる T を縮小作用素 (contraction) に限ったとき、核についてはより詳しい情報が得られることを示した。その一例として、区間 $[0, I - |T|^2]$ および $[|T^*|^2 - I, 0]$ は完全に核 $Z(T)$ に含まれることが示された。また T が正規 (normal) 作用素であることは、最大元 $Z_{\max}(T)$ が $(I - |T^*|^2)^{1/2}$ で与えられることと同値であることを見いだした。

数域縮小作用素の全体は弱閉な凸集合となるので、当然その端点 (extreme point) はどのようなものであるかが問題となる。容易にわかるように、 T が端点であることは $\begin{bmatrix} T & B \\ B & T \end{bmatrix}$ が数域縮小作用素となるのは $B = 0$ に限るという性質で特徴付けられる。その結果、 T が端点であれば必然的にその核は 1 点集合とならざるをえない。したがって核の 1 点集合性と他に何があれば端点であることを保証できるかが問題となる。

申請者はこれが或る種の作用素方程式が 0 以外の解を持たないという条件と同値であることを突き止めた。そして 0 以外の解を持たないことを保証する検証しやすい十分条件を提示した。

以上申請者の研究は、数域縮小作用素の研究に新しい局面を開いた重要な寄与となるもので、博士 (理学) の学位を得るにふさわしいものである。