博士（理　学）　渡　辺　文　彦

学位論文題名

Solutions of the fifth Painlevé equation　I

（パンルベ第五方程式の解についてＩ）

学位論文内容の要旨

パンルベ方程式とは、動く分岐点をもたない２階の代数的常微分方程式を分類する際にあらわれた、６本の方程式の総称である。これらは１９００年前後フランスの数学者パンルベとガムビエによって発見されたが、その当時からの最大の懸案のひとつとして、これらの方程式で定義される一般解が線型常微分方程式または１階代数的常微分方程式の解に還元され得ぬか否かという問題(パンルベ方程式の還元不可能性問題)がある。この問題は数学的定式化の困難さのゆえ長期間放置されていたが、１９８０年代後半、西岡啓二氏と梅村浩氏とにより、パンルベ第一方程式の場合にはこの問題は肯定的に解決された。筆者は残り５本の方程式についてこの問題に取組み、その結果、梅村氏との共同研究も含め、全ての方程式について問題が肯定的に解決されることを１９９２年見出した。本論文ではパンルベ第五方程式の場合の上述の問題の解を与え、副産物としてこの方程式のもつ超越古典解を全て決定する(定理１)。なお、本論文において展開された数学的技法は、他のパンルベ方程式にも適用できることから、一般的な技法であるといえる。

パンルベ第五方程式は実質的には次で与えられる。

$$S(\mathbf{v}) \qquad \begin{cases} t\dfrac{dq}{dt} = 2q^2p - 2qp + tq^2 - tq + (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)q + v_2 - v_1 \\ t\dfrac{dp}{dt} = -2qp^2 + p^2 - 2tpq + tp - (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)p + (v_3 - v_1)t \end{cases}$$

ここで $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ は $\mathbf{C}^4$ のベクトルで $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ をみたすものである。V を $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ で定義される $\mathbf{C}^4$ の超平面とするとき、V のアフィン変換 s_0, s_1, s_2, s_3 を $s_0(\mathbf{v}) = (v_1, v_4 + 1, v_3, v_2 - 1)$, $s_1(\mathbf{v}) = (v_2, v_1, v_3, v_4)$, $s_2(\mathbf{v}) = (v_3, v_2, v_1, v_4)$,$s_3(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, v_4, v_3)$ で定義する。これらの変換で生成される V の部分アフィン変換群を $\mathbf{H}$ とすると、$S(\mathbf{v})$ の解の双有理変換群 $\mathbf{H}_*$ で群 $\mathbf{H}$ に準同型なものが構成される。V の部分集合 Γ を次の条件で定義する。

(i) $\Re(v_2 - v_1) \geq 0$;

(ii) $\Re(v_1 - v_3) \geq 0$;
(iii) $\Re(v_3 - v_4) \geq 0$;
(iv) $\Re(v_4 - v_2 + 1) \geq 0$;
(v) $\Im(v_2 - v_1) \geq 0$ if $\Re(v_2 - v_1) = 0$;
(vi) $\Im(v_1 - v_3) \geq 0$ if $\Re(v_1 - v_3) = 0$;
(vii) $\Im(v_3 - v_4) \geq 0$ if $\Re(v_3 - v_4) = 0$;
(viii) $\Im(v_4 - v_2) \geq 0$ if $\Re(v_4 - v_2 + 1) = 0$.

ここで $\Re(v)$、$\Im(v)$ は複素数 v の実部と虚部である。以上から $\mathbf{v} \in \Gamma$ に対する $S(\mathbf{v})$ の解の決定をおこなえば、$\mathbf{v} \in \tilde{V}$ に対する $S(\mathbf{v})$ の解が全て決定されることがわかる。本論文における主要定理は次のとおりである。

定理 1. (i) ベクトル $\mathbf{v}_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ は $v_1 = v_3$ をみたすとする。このとき、リッカチ方程式

$$t\frac{dq}{dt} = tq^2 - tq + (v_4 - v_2)q + v_2 - v_1 \tag{1}$$

の解 q に対して、$(0, q)$ は $S(\mathbf{v}_1)$ の古典解である。
(ii) ベクトル $\mathbf{v}_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ は $v_1 = v_2$ をみたすとする。このとき、リッカチ方程式

$$t\frac{dp}{dt} = p^2 + tp + (v_3 - v_4)p + (v_3 - v_1)t \tag{2}$$

の解 p に対して、$(p, 0)$ は $S(\mathbf{v}_2)$ の古典解である。
(iii) ベクトル $\mathbf{v}_3 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ は $v_3 = v_4$ をみたすとする。このとき、リッカチ方程式

$$t\frac{dp}{dt} = -p^2 - tp + (v_2 - v_1)p + (v_3 - v_1)t \tag{3}$$

の解 p に対して、$(p, 1)$ は $S(\mathbf{v}_3)$ の古典解である。
(iv) ベクトル $\mathbf{v}_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ は $v_2 = v_4 + 1$ をみたすとする。このとき、リッカチ方程式

$$t\frac{dq}{dt} = -tq^2 + tq + (v_1 - v_3 - 1)q + v_2 - v_1 \tag{4}$$

の解 q に対して、$(-t, q)$ は $S(\mathbf{v}_4)$ の古典解である。
(v) $\mathbf{v} \in \Gamma$ に対して、(p, q) は $S(\mathbf{v})$ の超越解であって上の (i)–(iv) とはことなるものとする。このとき、p も q も古典的ではない。

(i) から (iv) までは容易に知り得るが、(v) の証明が難しく本論文の主眼である。このためには、$S(\mathbf{v})$ に対して梅村氏によって導入された条件 (J) とよばれるものを

調べる必要がある。$K/\mathbf{C}(t)$ は常微分拡大体、$K[p,q]$ は K 上の多項式環とする。$K[p,q]$ 上の微分作用素 $X(\mathbf{v})$ を次で定義する。

$$X(\mathbf{v}) = t\frac{\partial}{\partial t} + \{2q^2p - 2qp + tq^2 - tq + (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)q + v_2 - v_1\}\frac{\partial}{\partial q} \\ + \{-2qp^2 + p^2 - 2tpq + tp - (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)p + (v_3 - v_1)t\}\frac{\partial}{\partial p}$$

このとき、$X(\mathbf{v})$ が条件 (J) をみたすということを以下の意味にとる。

(J) 任意の常微分拡大 $K/\mathbf{C}(t)$ に対して、$K[p,q]$ の自明でない単項イデアル I で $X(\mathbf{v})I \subset I$ なるものは存在しない。

定理 1 の証明において最も基本的なのは次の命題である。

命題 2． $X(\mathbf{v})$ が条件 (J) をみたさないようなベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$ があると仮定する。このとき非負整数 a, b, i, j が存在して、

$$a + b + i + j \geq 1 \tag{5}$$

$$i(v_1 - v_2) + j(v_4 - v_3) + a(v_3 - v_1) + b(v_2 - v_4 - 1) = 0 \tag{6}$$

をみたす。

命題 2 の証明の概略は以下のとおりである。F は $K[p,q]$ の定数でない多項式で単項イデアル (F) が $X(\mathbf{v})$ で不変であるものとする。このとき、ある $G \in K[p,q]$ が存在して

$$X(\mathbf{v})F = GF \tag{7}$$

が得られる。等式 (7) を調べるために $K[p,q]$ にふたつの有階構造をいれる。それは、単項式 $\gamma p^i q^j$ $(0 \neq \gamma \in K)$ の重みを i とするものと j とするものとでそれぞれ与えられる。等式 (7) をこれらの有階構造に関してふた通りに斉次分解して有階斉次多項式に関する漸化式をふた通りに求め、これらの中から特定の幾つかの方程式を解くことにより所期の条件 (6) を得る。等式 (7) を解析する際、以下補題は極めて重要な役割をはたす。d は非負整数、A (または A') は第一 (または第二) 有階構造に関して重さ d の多項式とする。X_1, X_1' を

$$X_1 = 2pq(q-1)\frac{\partial}{\partial q} + (1-2q)p^2\frac{\partial}{\partial p}$$
$$X_1' = (2p+t)q^2\frac{\partial}{\partial q} - 2qp(p+t)\frac{\partial}{\partial p}$$

とおく。また、k は正整数、κ', λ', μ' は K の元とする。

補題3．(i) 合同式

$$X_1 A \equiv (\kappa' q + \lambda') pA \mod q^k \tag{8}$$

を考える。すべての整数 $l\ (1 \le l \le k)$ に対して $\lambda' - d + 2l - 2 \ne 0$ ならば、$A \equiv 0 \mod q^k$ である。

(ii) 合同式

$$X_1 A \equiv (\kappa' q + \lambda') pA \mod (q-1)^k \tag{9}$$

を考える。すべての整数 $l\ (1 \le l \le k)$ に対して $d + \kappa' + \lambda' - 2l + 2 \ne 0$ ならば、$A \equiv 0 \mod (q-1)^k$である。

(iii) 合同式

$$X_1' A' \equiv (\kappa' p + \mu') qA' \mod p^k \tag{10}$$

を考える。すべての整数 $l\ (1 \le l \le k)$ に対して $t^{-1}\mu' - d + 2l - 2 \ne 0$ ならば、$A' \equiv 0 \mod p^k$ である。

(iv) 合同式

$$X_1' A' \equiv (\kappa' p + \mu') qA' \mod (p+t)^k \tag{11}$$

を考える。すべての整数 $l\ (1 \le l \le k)$ に対して $d - \kappa' + t^{-1}\mu' - 2l + 2 \ne 0$ ならば、$A' \equiv 0 \mod (p+t)^k$ である。

定理1の証明を完結させるためには、命題2のほかに、$\mathbf{v} \in \Gamma$ に対する $S(\mathbf{v})$ の超越古典解を全て決定することが必要である。このためには、$X(\mathbf{v})$ $(\mathbf{v} \in \Gamma)$ で不変な $K[p,q]$ の単項イデアルを決定すれば十分であるが、このことは補題3により容易に知り得る。

以上の手続きを経て定理1が証明される。

学位論文審査の要旨

主　査	教　授	山　口　佳　三	
副　査	教　授	諏　訪　立　雄	
副　査	教　授	梅　村　　　浩	（名古屋大学理学部）
副　査	助教授	泉　屋　周　一	
副　査	助教授	清　原　一　吉	

学 位 論 文 題 名

Solutions of the fifth Painlevé equation　I

（パンルベ第五方程式の解についてＩ）

微分方程式、特に常微分方程式が与えらた時、それがどのような特殊関数を用いて求積できるかということは、古来、関心を持たれてきた問題である。しかし、求積できる微分方程式は数少ない。そこで、微分方程式で定義された新しい特殊関数を探し出して、求積できる微分方程式の範疇を少しでも広げようという努力がなされてきた。パンルベ方程式は、こうした努力の中で発見された、動く分岐点を持たない２階の代数的常微分方程式である。フランスの数学者パンルベとガムビエによって、６つの型に分類されている。発見の当時から、これらの方程式で定義される一般解が線形常微分方程式または１階代数的常微分方程式の解に還元され得るかどうかの問題、すなわち、パンルベ方程式の一般解が、新しい特殊関数であるか否かが問われてきた。本研究で、申請者はこの問題に決定的な寄与を行った。

この既約性（還元不可能性）の問題は、歴史的には、パンルベ自身の研究の後、数学的定式化の困難さのゆえに長期間放置されていたが、１９８０年代後半に、西岡啓二氏と梅村浩氏によって、パンルベ第一方程式の場合に、初めて既約性が証明された。この過程で、問題が（常）微分体の拡大の問題として定式化され、還元可能性が、有理関数体Ｃ (t) から出発して、適当な代数群ＧによるＧ原始拡大に入ることによって判定されることとなった。さらに、既約性の判定には、本来２階のパンルベ方程式を１階のハミルトン系に書くことによって、方程式が定める１階の微分作用素Ｘの作用のもとで不変な単項イデアルを持つＣ (t) の拡大体の非存在を示

せばよいことが明らかにされた。

申請者は、まず、参考論文に於いて、梅村浩氏と共同で、第二方程式に対してこのようなX不変単項イデアルが存在する場合の条件を求める方法を開発した。この議論に於いて、第一方程式の場合との決定的な相違点は、方程式に現れるパラメーターの存在である。第一方程式の場合には、直接的にX不変な単項イデアルの非存在を示せたが、この場合には、単項イデアルそのものは存在することが考えられ、この時の必要条件を、パラメーターの束縛条件として求める必要があった。本研究で、申請者は、参考論文で開発した方法を用いて、第五方程式の解の性質を調べた。第五方程式の場合には、本質的なパラメーターの個数が3個に増え、上記の単項イデアルが存在し得るパラメーターの束縛条件を求める問題は、飛躍的に困難さを増したが、申請者は、これを克服して、この束縛条件を求め、第五方程式に超越的古典解がいつ現れるかまでを明らかにした。

以上、申請者は、パンルベ第五方程式の既約性の問題を解決し、さらにこの方程式の持つ超越古典解を全て決定して、この問題に決定的な寄与をなした。

この学位論文は既に、Hokkaido Mathematical Journal に投稿され掲載が決定している。

審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。