

学 位 論 文 題 名

On commutativity of diagrams of type Π_1 factors

(Π_1 型因子環の図式の可換性について)

学位論文内容の要旨

フォンノイマン環の理論は近年めざましい発展をとげた。古くは、von Neumann による因子環の I, II_1, II_∞, III 型への分類があり、最近では、A. Connes らによる、近似的有限次元因子環の完全な分類がある。(これによって、 III 型はさらに III_λ 型へと細分されることになる。) さらに、1983 年の V.F. Jones による指数理論に始まって、研究の中心は、2 個のフォンノイマン環の包含関係 $N \subset M$ に移っていった。本論文は、この延長線上ともいうべき、以下の図式で示される包含関係をもった 4 個のフォンノイマン環を研究の対象とする。

$$\begin{array}{ccc} Q & \subset & K \\ U & & U \\ S & \subset & R \end{array} \quad (*)$$

ただし、 S の単位元は K, Q, R の単位元であるとし、 Q, R のあいだには包含関係はないものとする。フォンノイマン環 K が有限なトレース τ をもち、 E_Q^K, E_R^K, E_S^K をそれぞれ Q, R, S の上への τ を保存する条件付き期待値とすると、つぎのような特別の状況が起こり得る：

$$E_Q^K E_R^K = E_R^K E_Q^K = E_S^K.$$

このとき、うえの図式 $(*)$ は、可換である (commuting square である) といわれ、とくに、 $Q \cap R = S$ が成り立つ。さらに $S = \mathbb{C}$ の場合には Q, R は直交しているといわれる。このばあいは、確率論における、 σ -集合体の独立性の条件に対応する。可換性の概念に対して「余可換 (co-commuting square)」の概念も導入される (この場合には、 $Q \vee R = K$ が成り立つ)。 $Q \vee R = K, Q \cap R = S$ でしかも可換でも余可換でもない図式はいくらでも存在する。(これは、たとえば、退化した図式とのテンソル積をとることで得られる。)

この図式の概念は部分因子環の理論のなかで、重要な役割を演じている。特に、部分因子環の分類や構成、相対エントロピー、部分因子環の間の角度、因子環上の paragroup の作用、部分因子環の深さ (depth) などとの関係で議論される。

本論文は、主に図式 (*) にあらわれるフォンノイマン環が II_1 型因子環である場合を取り扱う。これは、S. Popa, T. Sano, Y. Watatani, Y. Kawahigashi などによっても論じられた場合である。結果は、2 種類に大別される。ひとつは、 II_1 型因子環からなる図式 (*) が可換（または余可換）になるための十分条件、他のひとつは、可換（または余可換）な図式からえられる結論についてである。

第 1 章では、部分因子環の理論で知られている事柄を説明し、本論文で使用される記号を導入しておく。原則として、証明は与えない。

V.F. Jones は、 II_1 型因子環 $S \subset Q$ に対して指数 $[Q : S]$ を導入し、この取り得る値が $\{4 \cos^2 \pi/n : n = 3, 4, \dots\} \cup [4, \infty]$ であることを示した。その後、A. Ocneanu や S. Popa などによってこの包含関係 $S \subset Q$ は深く研究され、指数が 4 以下で因子環が近似的有限次元の場合には、この包含関係が完全に分類された。この研究の途上で S. Popa によって導入されたのが、図式概念である。

第 2 章では、図式が可換になるための十分条件を論ずる。ある種の包含関係 $S \subset Q$ に対して、 $[K : S] < \infty$, $S' \cap K = \mathbb{C}$ となるような II_1 型因子環の図式 (*) が、驚くべきことに自動的に可換になる。この種の結果をいくつか与える。

定理。 II_1 型因子環の図式 (*) において、 $S' \cap K = \mathbb{C}$, $[K : S] < \infty$ を仮定する。もし、素数 n に対して $[Q : S] = 4 \cos^2 \pi/n$ ならば、図式 (*) は可換である。

これは、この方面の結果において n の素数性を用いた初めての結果である。この背後には代数的数論との関連が存在するものと思われる。

定理。 II_1 型因子環の図式 (*) において、 $S' \cap K = \mathbb{C}$, $[K : S] < \infty$ を仮定する。もし、包含関係 $S \subset Q$ の 2 次相対交換子が 2 次元で、 $[Q : S] > [R : S]$ ならば、図式 (*) は可換である。

証明において A. Ocneanu のフーリエ変換の理論を用いるが、技術的に肝要な点は、畳込み $E_Q^K * E_R^K$ が射影演算子のスカラー倍になることである。このことより、ふたつの部分因子環が「直交」するのは、ある場合にはそれほど特殊でないことが分かる。

図式の余可換性は別の図式の可換性と同値なので、上述の結果は余可換の場合にも翻訳することができる。

第 3 章では、図式の可換性の必要条件について論ずる。非可換な状況でのエントロピーは近年いろいろと論じられているが、A. Connes と E. Størmer は有限フォンノイマン環 L の自己同型写像に対して、エントロピーの概念を導入するとともに、 L の有限次元部分代数 M, N に対して、相対エントロピー $H(M|N)$ を定義した。これは、確率論における同様の概念を拡張するものである。のち、M. Pimsner と S. Popa は、 II_1 型因子環 $N \subset M$ に対して、相対

エントロピー $H(M|N)$ と指数 $[M:N]$ とを関係づけた。これは、さらに、一般のフォンノイマン環の場合にまで拡張されている。

定理。図式 $(*)$ が可換であるならば、

$$H(Q|R) = H(Q|Q \cap R)$$

これは、可換なばあいにも知られていなかった結果を与えるものである。

定理。II₁ 型因子環の図式 $(*)$ が余可換で、 $S \subset Q$ が *extreme* ならば、

$$H(Q|R) = H(Q \vee R|R)$$

さらに、上述のふたつの定理における等式が可換性（余可換性）と同値であるような例を与える。このことは、エントロピーの等式が可換性（余可換性）のための必要かつ十分条件である可能性を示していると思われる。

定理。II₁ 型因子環の図式 $(*)$ が可換でかつ余可換である場合、 $S \subset Q$, $Q \subset K$ の深さが有限ならば、 $S \subset K$ の深さも有限である。また、このとき、 $H(K|Q) = H(R|S)$ がなりたつ。

これは、知られていた結果のある種の逆で、可換、余可換の条件なしには成り立たない結果である。包含関係 $S \subset K$ に対して、その深さが有限という条件は、少なくとも近似的有限次元の場合には、その分類を可能にするものである。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 岸 本 晶 孝

副 査 教 授 安 藤 毅

副 査 教 授 中 路 貴 彦

副 査 教 授 林 実 樹 廣

副 査 教 授 綿 谷 安 男

(九州大学大学院数理学研究科)

学 位 論 文 題 名

On commutativity of diagrams of type II_1 factors

(II_1 型因子環の図式の可換性について)

本論文は、作用素環論における部分因子環の指数理論において導入された“commuting square”という概念を、 II_1 型因子環の場合に研究したものである。とくに、commuting squareを得るための十分条件をいくつか求め、その場合に、部分因子環に対する不変量である深さ(depth)や部分因子環相互の相対エントロピーにおける関係式を導いた。

ヒルベルト空間上の有界線形作用素から作られた $*$ 環で、弱位相で閉じているものをフォンノイマン環という。さらに中心がスカラーしかないものを因子環という。因子環は、その中の射影元のなす束の構造により、I型、 II_1 型、 II_∞ 型、III型に分類される。

1983年、V. Jones は II_1 型因子環 M とその部分因子環 N に対して、その「大きさの比」として指数 $[M:N]$ を導入し、その基本的性質を明らかにした。この指数理論は、その後、結び目の理論、可解格子模型、量子群、低次元トポロジー、共形場理論などの多くの他の分野に影響をあたえ、III型の場合にも拡張されている。Jones が先ず明らかにしたことは、指数の取り得る値が、 $\{4\cos^2\pi/n; n=3,4,5,\dots\} \cup [4,\infty]$ であるということである。このことで、部分因子環 N の M への入り方(包含関係)に離散的構造の潜んでいることが明らかとなり、その後この包含関係は深く解析された。特に、Ocneanu や Popa らによって、指数が4以下で、因子環がAFDといわれるものの場合には、この包含関係の分類が完全になされた。これらの研究過程で“commuting square”という概念が導入され、その重要性が認識された。

本論文では、4 個の II_1 型因子環 K, L, M, N につきの包含関係

$$\begin{array}{ccc} N & \subset & L \\ \cup & & \cup \\ K & \subset & M \end{array}$$

のある場合を考える。(ただし、 K の単位元は L, M, N の単位元でもあり、 M, N の間に包含関係はないとする。) この図式が可換である (commuting square である) とは、 L から K, M, N への自然な条件付き期待値 E_K, E_M, E_N に対して、関係式 $E_N E_M = E_M E_N = E_K$ が成り立つことである (従ってとくに $K = M \cap N$ が成り立つ)。また一種の双対性によって余可換 (co-commuting square) の概念も導入されている。申請者は多くの結果を得たが、主要なものは次の三種に分類できる。

1) この図式が自動的に可換になるための興味深い十分条件をいくつか求めた (定理 2.2.2、定理 2.3.4、系 2.3.5)。

2) この図式が可換かつ余可換である場合に、 $K \subset M, M \subset L$ が深さ有限ならば、 $K \subset L$ も深さ有限になり、さらにその深さに対する上からの評価式を得た (定理 3.4.4)。

3) この図式に対して条件をつけることで、相対エントロピー $H(M|N)$ を求める公式をえた (定理 3.1.1、定理 3.1.3)。

イ) この図式が可換であるとき、 $H(M|N) = H(M|M \cap N)$ 。ただしこのときは K, L, M, N は一般のフォンノイマン環でよい。

ロ) この図式が余可換で、 $K \subset M$ が *extremal* のとき、 $H(M|N) = H(M \vee N|N)$ 。

以上のなかで、(1) は Ocneanu のフーリエ変換の理論をきわめて巧みに用いることによって得られた。(この理論はいまだにその全容が発表されていないもので、申請者が独自にその証明をつけ、それを道具として使いこなした。) 特に指数 $[N : K] = 4 \cos^2 \pi/n$ における n が素数という性質を用いて可換性を導きだしたのは注目に値する。(2) は、可換かつ余可換という条件なしには成り立たないものであり、この条件のもとで、既知の「 $K \subset L$ が深さ有限ならば $K \subset M, M \subset L$ も深さ有限である」という結果の逆を示したことは高く評価できる。(3) では、可換とか余可換とかいう条件をつけることで、一般には成立しない等式を示した。特に、(イ) は、 K, L, M, N が可換の場合でも認識されていなかったもので、注目に値する。(この場合には、「可換」の概念は確率論の「独立」の概念に相当し、相対エントロピーなどの概念はよく知られている。)

以上、申請者は、 II_1 型因子環の図形の可換性について考察し、多くの十分条件・必要条件を得ることによって、そのような図形に対する理解を深めた。審査員一同は、これらの成果などにより、申請者が博士 (理学) の学位を受けるに十分な資格があるものと認定した。