

学 位 論 文 題 名

On global weak solutions of the nonstationary
two-phase Navier-Stokes flow

（非定常二相ナビエ-ストークス流の大域弱解について）

学位論文内容の要旨

ここでは粘性の異なる互いに溶け合わない二相非圧縮流体の運動を考察する。

問題の定式化： Ω を境界が十分滑らかな（少なくとも $C^{2+\mu}$, $0 < \mu < 1$ ） $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) の領域とする。今 Ω の中に、水と油のような粘性の異なる互いに溶け合わない二種類の非圧縮流体が入っている。粘性をそれぞれ ν_+ , ν_- とし、 $\nu_+ > \nu_-$ とする。（記号上、しばしば ν_+ , ν_- を同時に $\nu_{\pm}$ と書く。）密度は一定であるとし、1 とする。粘性 $\nu_{\pm}$ の流体の速度を $u_{\pm} = u_{\pm}(t, x)$ 、圧力を $\pi_{\pm} = \pi_{\pm}(t, x)$ とする。時刻 t における粘性 $\nu_{\pm}$ の流体の占める領域を $\Omega_{\pm}(t)$ とする。このとき $u_{\pm}$ と $\pi_{\pm}$ は次の Navier-Stokes 方程式を満たす。

$$\partial_t u_{\pm} - \nu_{\pm} \Delta u_{\pm} + (u_{\pm} \cdot \nabla) u_{\pm} + \nabla \pi_{\pm} = 0, \quad \operatorname{div} u_{\pm} = 0, \quad \text{in } \Omega_{\pm}(t), \quad 0 < t < T. \quad (1)$$

ここで ∂_t は時間微分、 ∇ は空間微分を表し、 Δ はラプラシアン、 $\cdot$ はベクトルの内積を表す。 $\Omega_+(t)$ と $\Omega_-(t)$ の和集合の補集合を界面と呼び、 $\Gamma(t)$ で表す。 $\Gamma(t)$ は $\Omega_+(t)$ と $\Omega_-(t)$ の間の境界となるような滑らかな超曲面とする。このとき界面 $\Gamma(t)$ 上で流速は連続であるとする。すなわち、

$$u_+ = u_-, \quad \text{on } \Gamma(t) \quad (2)$$

（注：一般には界面上で二つの流体は滑ることがあるが、ここではそのような状況は考えない。） $\mathbf{n}$ を $\Omega_+(t)$ から $\Omega_-(t)$ への単位法線ベクトルとする。界面上でストレステンソルの $\mathbf{n}$ 方向成分が連続とする。すなわち、

$$T_+(u_+, \pi_+) \cdot \mathbf{n} = T_-(u_-, \pi_-) \cdot \mathbf{n}, \quad \text{on } \Gamma(t) \quad (3)$$

ここでストレステンソルは $T_{\pm}(u_{\pm}, \pi_{\pm}) := \nu_{\pm} D(u_{\pm}) - \pi_{\pm} I$ で与えられ、 $D(u) = (D_{kl}(u)) := \frac{\partial u^k}{\partial x^l} + \frac{\partial u^l}{\partial x^k}$ は変形テンソルを表す。次に界面の運動条件を課す。 $V = V(t, x)$ を $x \in \Gamma(t)$ における $\mathbf{n}$ 方向の $\Gamma(t)$ の速度とする。界面は流速と共に動き、 Ω の境界 $\partial\Omega$ と直交するとする。すなわち、

$$V = u_+ \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma(t), \quad \gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \cap \overline{\Gamma(t)}, \quad (\text{初期分布}) \quad \Omega_{\pm}(0) = \Omega_{\pm 0} \quad (4)$$

ここで γ は $\partial\Omega$ の内向き単位法ベクトルである。(界面の運動速度 V は流速と独立に定義されるので (4) 第一式は V の定義式ではなく、界面と流速との関係式であることに注意したい。) なお (4) 第一式、第二式より $\partial\Omega$ 上において界面は $\partial\Omega$ 上の流速の接線方向成分によってのみ輸送されることが分かる。ここでは界面が $\partial\Omega$ 上で動くことを許したいので、 Ω の境界上で非粘着条件を課す。すなわち、ある既知な連続関数 $h = h(t, x)$ に対して、

$$(\text{境界条件}) \quad u_{\pm} = h \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{\pm}(t) \cap \partial\Omega, \quad (\text{初期条件}) \quad u_{\pm} = h \quad \text{on} \quad \Omega_{\pm}(0) \quad (5)$$

とする。ただし h は $\int_{\partial\Omega} h(t, x) \cdot \gamma(x) \, d\sigma = 0$ をすべての t で満たすとする。なお外力は 0 とした。

問題意識： 目標は、二つの粘性 ν_+ と ν_- が十分近く、 h が十分小さく滑らかなとき、任意に与えられた初期分布 $\Omega_{\pm 0}$ に対し、(1) – (5) の時間大域解を構成することである。たとえば一つの相がちぎれるとき、界面は微分不可能となるが、今までにその直前まで滑らかな解が得られている。そこでその後も追跡できるような解を構成したい。Giga and Takahashi [GT] が ν_+ と ν_- が十分近いとき、周期境界条件下で二相 Stokes 流の大域解を構成している。流速が十分遅く滑らかなとき、Navier-Stokes 方程式のかわりに線形な Stokes 方程式を考えることができ、周期境界条件下では境界は二相間の界面だけとなる。ここでは彼らの議論をより自然な条件下で発展させる。なお表面張力の効果は考えられていない。二相が細かく分かれて界面の曲率が大きくなるほど、表面張力も大きくなる。表面張力を考慮すると、(3) のようにストレステンソルの法成分は界面上で連続にならない。(この場合は今後の課題として、ここでは表面張力を無視した。) この問題では (1) – (3) 及び (5) が流体の運動を記述し、(4) が界面の運動を記述しているが、流速、圧力と共に界面も未知であり、未知関数が三つあることに注意したい。

証明の方針： まず与えられた流速 u_0 に対して、 $u_+ = u_0$ として (4) を解いて領域の時間発展 $\Omega_{\pm}^{u_0}$ を求め、 $\Omega_{\pm}(t) = \Omega_{\pm}^{u_0}(t)$ として (1) – (3) 及び (5) を解いて、流速 u_1 を求める。そして、不動点定理により $u_0 = u_1$ となるような流速が求まれば、それが (1) – (5) の解として期待できるであろう。ただし、この 3 つの各段階で、解の定義をより弱く (広く) することによって、より一般化された状況を許す。よってここで得られる解は、ある条件下では適切な解となる弱解 (広義解) と呼ばれるものである。

まず界面の輸送方程式 (4) をより一般化する。界面は滑らかでないかも知れないので、界面をある補助関数のゼロ等高面とみなす。もし u_0 がリプシッツ連続なら、補助関数の一意存在が知られている。しかし、後に不動点定理を連続関数空間上で適用するので、 u_0 はここでは単なる連続関数である。よって界面の運動の一意性は期待できない。そこで (4) の一般化された方程式の解の中で一番早く動いたときの解 (最大解) と一番遅く動いたときの解 (最小解) の一意性を示し、最大解と最小解のゼロ等高面の間の領域を界面とみなす。しかしもし一意性があつたとしても、一般化された解のゼロ等高面は厚くなるかも知れない。このようにここでは、界面が有限時間内に厚くなることを許すような二相の領域の広義時間発展を大域的、一意的に構成する。(なお [GT] は境界条件第二式を伴わない場合に広義解をトーラス上で求めている。(周期境界条件下での運動はトーラス上での運

動とみなすことができる。) ここでは第二式をつけても彼らの議論を拡張できることを示す。

次に、Navier-Stokes 方程式 (1) - (3) を一般化する。粘性を与える関数 $\nu = \nu(t, x)$ を $\Omega_{\pm}(t)$ で $\nu_{\pm}$ とする階段関数とする。速度 u を $\Omega_{\pm}(t)$ で $u_{\pm}$ とし、圧力 π も同様に定める。このとき (1) 第一式と (3) は形式的に

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\nu D(u)) + (u \cdot \nabla) u + \nabla \pi = 0, \quad \text{in } (0, T) \times \Omega \quad (6)$$

と同値である。((6) は超関数の意味で理解される。 ν は界面で不連続で微分されているので、界面が台となるディラックの δ 関数が現れる。これが (3) に対応する。(界面が滑らかな超曲面なら、真に同値になる。)) これによって方程式を固定領域 Ω 上で考えることができるようになった。同様に固定領域上で

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = h|_{\partial\Omega}, \quad u|_{t=0} = h|_{t=0} \quad (7)$$

を得る。界面が厚みを持つかも知れないので、 ν に界面上で ν_+ と ν_- の間の値、たとえば平均値 $(\nu_+ + \nu_-)/2$ を与えることによって、(1) - (3) 及び (5) は、(6) - (7) と広義に解釈される。

粘性係数 ν を u_0 に対して定まる領域の広義時間発展 $\Omega_{\pm}^u$ を通じて定まる階段関数 ν_{u_0} とする。 $\nu = \nu_{u_0}$ に対して (6) - (7) を解く際、初期境界値を引いて 0 とする。このとき湧き出しが発生する ($\operatorname{div}(u - h) \neq 0$) ので、Bogovski の作用素を適用する。解は $(\nu_+ - \nu_-)/\nu_+$ と h のあるノルムが十分小のとき、得られる。このように (6) - (7) の解 u_1 が定まるので、写像 $S: u_0 \mapsto u_1$ が得られるが、 S は必ずしも連続とはいえないので Leray-Schauder の不動点定理を適用できない。[GT] が S をグラフが閉となる集合値写像 S に拡張し、角谷の不動点定理を適用している。こうして得られた不動点は残念ながら (6) を Ω 全体で満たさないかも知れない。実際、界面で (6) は成り立たない。しかし Ω_+ , Ω_- では成り立つ。

なお角谷の定理で S のコンパクト性が要求されるが、それは不連続粘性係数をもつ Navier-Stokes 方程式 (6) - (7) の先験的評価によって与えられる。トーラスのように境界のない領域では、Stokes 方程式は熱方程式に帰着され、容易である。ここでは Giga, Giga and Sohr [GGS] の Stokes 方程式の解の評価を利用する。また Stokes 方程式の場合と違って (6) - (7) の評価を得るには、流速が (L^{n+2} で) 十分小さいことが要求される。これはデータ h によって与えられる。(なお通常の一相 Navier-Stokes 方程式で、流速が L^{n+2} に入るとき、滑らかになることが分かっている。)

このようにここで得られた弱解は、もし界面が厚みを持たず滑らかならば、(1) - (5) の (時間大域) 解となるというものである。またこの弱解の一意性は不明なので、仮に界面が厚くならないとしても、既に知られている時間局所解と一致するかどうか分からない。実際に界面が厚くなるかどうか分らず、厚くなるような例も発見されていない。一意性を得るには、界面に関する本質的な情報がより要求されるであろう。

参考文献

[GGS] M.Giga, Y.Giga and H.Sohr, *L^p estimates for the Stokes system*, Functional Analysis and Related Topics, 1991, (Ed. H. Komatsu) (1993), 55-67, Springer Lecture Note 1540.

[GT] Y.Giga and S. Takahashi, *On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow*, Hokkaido Univ. Preprint No.149)(to appear in SIAM J. Math. Anal.)

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 儀 我 美 一
副 査 教 授 上 見 練太郎
副 査 教 授 久保田 幸 次
副 査 教 授 岡 部 靖 憲
副 査 教 授 岸 本 晶 孝

学 位 論 文 題 名

On global weak solutions of the nonstationary two-phase Navier-Stokes flow

(非定常二相ナヴィエ-ストークス流の大域弱解について)

物理学の基本的な方程式の数学的解析は重要である。申請者は主に非圧縮性粘性流体の運動を支配するナヴィエ・ストークス方程式の数学的研究でいくつかの成果をあげている。本論文では、容器の中にはいった解け合わない2流体の運動を記述する2相ナヴィエ・ストークス方程式を扱った。基本的な問題は、与えられた初期値に関して解が存在するかということである。ここでは、2流体は、密度が等しく粘性だけ異なるとする。固定境界上の流速は既知とする。注目すべきは、2流体の境目の運動も未知であるいわゆる自由境界になる点である。

この問題に対しては、短い時間なら、解が存在することがわかるのみで、時間大域的に滑らかな解が存在するかは不明である。というのは、一方の流体がちぎれたりすることがありうるので滑らかな解の範囲で考えたのでは、時間大域的には解けない可能性があるからである。したがって弱い解の概念が必要である。

2流体の問題は、ナヴィエ・ストークス方程式を線形化したストークス方程式に対しても自明ではない。それについて申請者は、以前適切と思われる弱解の概念をつくり2粘性があまり異ならないとき大域的弱解を構成した。しかし、そこでは周期境界条件を仮定しているので、非斉次ディリクレ条件を固定壁に課した場合には、適用できなかった。

本論文で申請者は、2相ナビエ・ストークス方程式についても速度場（固定壁上）が小さければ、ディリクレ条件の場合も、自由境界が固定壁と直角に交わる大域弱解を構成した。

周期境界条件の場合は、ストークス方程式は、本質的に熱方程式になるが、ディリクレ境界条件の場合は、工夫がいる。申請者は、ストークス方程式のよいアプリアリ評価を導きそれを解決した。

固定壁が出現したために、速度場を与えたときの自由境界の運動の広義解についてあらたな工夫がいる。この点は、既製の理論をうまく適用しなおして、克服されている。また非斉次のディリクレ条件のため、それを斉次になおす必要がある。しかし、ふつうに行うと圧縮性条件が保たれない。そこで申請者は、圧縮性条件を回復するために、発散が与えられたときの速度場を、台をふやさぬように構成するボゴスキー公式を巧みに用いていた。

弱解の構成は不動点定理による。与えられた速度場にそって、その法則で自由境界を動かす。その自由境界を与えて、速度場をナビエ・ストークス方程式を解くことにより求める。こうすると速度場に対して新たな速度場がもとまる。この写像の不動点が解であるが、非線形偏微分方程式論でよく用いられるルレイ・シャウダーの不動点定理は写像が連続でないので適用できない。そこで多価写像に拡張して、角谷の不動点定理を用いた。この部分は既に2相ストークス方程式に周期条件を課しても問題であるが、ナビエ・ストークスの場合さらに面倒になり、非線形項の評価も必要になってくる。申請者は、これらの技術的困難を克服し、大域弱解の構成に成功した。この解を古典解との関係はすべて未知であるので、今後の説明が期待される。

以上、申請者は、ナビエ・ストークス方程式の解析で著しい研究成果をあげた。

なお学位論文は、このままの形で応用数学の国際誌である、Advances in Mathematical Sciences and its Applicationsに掲載されることが決まっている。

審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるのに十分な資格を有するものと認める。