

学 位 論 文 題 名

Non-commutative Banach function spaces

(非可換バナッハ関数空間)

学位論文内容の要旨

(X, μ) を測度空間とすると、 $L_p(X, \mu)$ ($0 < p \leq \infty$) に属する可測関数は、Hilbert 空間 $L_2(X, \mu)$ 上の (一般には非有界な) 掛算作用素を引き起こす。この事は Hilbert 空間 H に作用する半有限 von Neumann 環 M とその忠実正規半有限トレース τ に対して、次のように一般化される。 H 上の稠密定義域を持つ閉作用素 a が M に付随的であるとは、 a の極分解を $a = u|a|$ とした時、 u 及び $|a|$ のスペクトル射影が M に属する事をいう。さらにある $t > 0$ があって、区間 (t, ∞) に対応する $|a|$ のスペクトル射影の τ の値が有限となる時、 a は τ -可測であるという。 τ -可測作用素の全体は測度位相によって完備位相 $*$ -環となり、これが von Neumann 環に付随した非可換積分論の土台を与える。特に $M = L_\infty(X, \mu)$ の場合は、通常の測度収束に関する位相で M を完備化したものである。

Segal 及び Dixmier は、1953 年、 $|a|$ の p べきが有限な τ の値を持つような τ -可測作用素 a の全体を非可換 L_p -空間 $L_p(M, \tau)$ と定義した。これは可測関数のなす L_p -空間 と、コンパクト作用素のなす Schatten の C_p -イデアルの統一拡張を与えるものである。

非可換 L_p -空間 は、順序付き Banach 空間の広いクラスを与えるものとして、また von Neumann 環論にとっては標準形および自己共役錘の脈絡で、様々な角度から研究されている。

Kolmogorov や Zygmund 等は、(可測関数の) L_p -空間では、conjugate-function operator のような作用素の性質を叙述するに不十分であるという事を明らかにし、Orlicz 空間や Lorentz 空間が 50 年までに導入された。Orlicz 及び Lorentz 空間

を公理的枠組みの中で統一する試みは Halperin 等によって始められ、Luxemburg が 55 年に Banach 関数ノルムと Banach 関数空間という現在の定式化を与え、Zaanen 等と共に基本的理論を展開した。一方、Schatten 等は、非自己共役作用素の triangular form との関連から、コンパクト作用素のなす対称ノルムイデアルを公理づけた。

次の結果はよく知られている。 $C(H)$ で H 上のコンパクト作用素全体を表すと、 $C(H)$ 上の対称ノルムと $\{1, 2, \dots\}$ 上の再配列不変関数ノルムは 1 対 1 に対応する。コンパクト作用素のなす完備対称ノルムイデアルが可分であるための必要十分条件は、対応する再配列不変関数ノルムが絶対連続でかつ H が可分な事である。

本論文では、測度空間上の可測関数がなす（可換な）Banach 関数空間と、コンパクト作用素がなす Schatten の（非可換な）対称ノルムイデアルの統一拡張として、さらに非可換 L_p -空間を一般化するものとして、 σ -有限な半有限 von Neumann 環 M に付随した非可換 Banach 関数空間の公理を導入した。これは、Schatten の方法を踏襲して、可測関数の Banach 関数空間の公理に対称性をつけ加えただけの自然なものである。具体的には、非可換 Banach 関数ノルムは M に付随した τ -可測作用素環の非負自己共役元全体上の ∞ も許した非負関数であり、その定める非可換 Banach 関数空間は $\|a\|$ のノルムが有限値となる τ -可測作用素 a の全体である。作用素の非可換性は、作用素の族の上限を取る操作や単純な三角不等式を許さないが、ノルムの対称性によって、非可換 Banach 関数空間の一般論を可換な場合とほぼ並行に進める事が出来た。特に、緩やかな条件の下で、非可換 Banach 関数空間とその 2 階の associate space が一致する事を示した (Theorem 2.7)。 M が因子環の場合は、射影の比較定理によって、その条件は自動的に満たされている。

τ -可測作用素環において、80 年代までに得られていた Fatou の補題や抑制収束定理の非可換版は測度収束を仮定するものであった。 M が固有無限の場合、非可換 Banach 関数空間論を展開するにはこの仮定が強すぎるという困難を解決するため、局所的測度収束の概念を導入した。 τ -可測作用素の列 $\{x_n\}$ が x に局所的測度収束するとは、 $\tau(p) < \infty$ なる任意の射影作用素 p に対して、 $\{px_n p\}$ が $p x p$ に測度収束

する事である。このとき、局所的測度収束列に対して、一般化された s -number に関する Fatou の補題の拡張を、スペクトル射影のやや詳しい計算によって示した (Lemma 3.4)。これを用いる事により、次の定理を得た (Theorem 3.6)。

【定理】 M が因子環ならば、 τ -可測作用素環上の非可換 Banach 関数ノルムと、区間 $(0, \tau(1))$ 上の再配列不変関数ノルムとが、自然に 1 対 1 に対応する。

再配列不変関数ノルムが非可換 Banach 関数ノルムを定める事については、80年代後半に Fack-幸崎、日合-中村 及び B.Dodds-T.Dodds-de Pagter によって得られた、 τ -可測作用素に関する一般化された s -number の majorization と、Lemma 3.4 を用いる。逆に非可換 Banach 関数ノルムから再配列不変関数ノルムを構成するには、因子環の仮定が本質的である (Remark 3.8)。具体的な構成に用いるのは、日合-中村が発展させた、コンパクト作用素の Schmidt 分解の連続的類似物である。

この事より、非可換 Banach 関数空間の研究は、(可換な)再配分不変 Banach 関数空間と因子環の直積分におけるそれらの属性の振舞いの研究に、原理的には帰着されるように思える。特に、再配列不変関数ノルムの絶対連続性は非可換 Banach 関数ノルムに遺伝する事を示し (Theorem 4.4)、非可換 Banach 関数ノルムが可分な空間を定めるための必要十分条件は、対応する再配列不変関数ノルムが絶対連続でかつ M の前双対空間が可分なことである事を示した (Theorem 4.9)。また、この過程は、局所的測度収束列に対する抑制収束定理、絶対連続ノルムを持つ元全体と τ -コンパクト作用素の閉包の包含関係についての結果も含んでいる。

以上。

学位論文審査の要旨

主査	教授	岸	本	晶	孝
副査	教授	安	藤		毅
副査	教授	岡	部	靖	憲
副査	教授	儀	我	美	一
副査	教授	林	実	樹	廣

学位論文題名

Non-commutative Banach function spaces

(非可換バナッハ関数空間)

積分論の基本概念である測度空間に対して、その上の可測関数からなる空間としてのバナッハ関数空間の概念がある。これは、いわゆる p 乗可積分な関数からなる空間 L_p や本質的に有界な関数からなる空間 L_∞ など具体的に知られているバナッハ空間としての関数空間を含む一般的な概念である。他方、フォンノイマンによって導入された作用素環（フォンノイマン環）は、上述の L_∞ をヒルベルト空間 L_2 に自然に掛け算作用素として作用しているとみたとき、その拡張概念として捉えられ、いわゆる非可換積分論の範疇に属する基本概念である。フォンノイマン環に対しては、その非可換性ゆえに基いとなる測度空間と類似の概念を導入することは困難であるが、それが L_∞ に相当することから L_p に相当するものを直接に導入することができる。このことは1950年代から近年にいたるまで多くのひとの努力によって明らかになった。

測度空間 (X, m) 上の可測関数 f で、十分おおきな t に対して $m\{x; |f(x)| \geq t\}$ が有限であるようなものの全体は測度位相に関して完備な位相 $*$ 環をなす。このことは、半有限なフォンノイマン環 M に対して、測度 m の代わりに忠実正規半有限トレース τ を用いて一般化される。すなわち、 M に付随した閉作用素 a で、十分おおきな t に対して区間 (t, ∞) に対応する $|a|$ のスペクトル射影の τ の値が有限であるようなもの（ τ 可測作

用素)全体は「測度位相」に関して完備な位相*環をなす。上述のバナッハ空間はすべてこれらの*環を用いて構成される。本研究は、このことを用いて、上述の L_p 空間にとどまらずバナッハ関数空間の概念をフォンノイマン環に導入することを目指すものであり、フォンノイマン環が半有限である場合にその目的を達成した。具体的には、申請者は、 σ 有限なフォンノイマン環に対して、非可換バナッハ関数ノルムの概念を定義し、その種々の性質を明らかにするとともに、半有限な因子環の場合に、それを決定した。正確には、定理 3.6 において、 τ 可測作用素環上の非可換バナッハ関数ノルムと区間 $(0, \tau(1))$ 上の再配列不変バナッハ関数ノルムとが自然に一対一に対応することを示した。さらに、申請者は、その証明の過程において、フォンノイマン環が固有無限である場合(因子環ならば $\tau(1)=\infty$ の場合)を取り扱うために、局所的測度収束の概念を導入し、測度収束に対する、一般化特異数(generalized s-number)に関するファーターの補題をこの場合に拡張した。これは本論文のなかでもかなり技術的な部分である。

これらのことにより、非可換バナッハ関数空間の研究は、(可換な)再配分不変バナッハ関数空間とその直積分の研究に、原理的には帰着される。とくに、申請者は、再配列不変バナッハ関数ノルムの絶対連続性は、対応する非可換バナッハ関数ノルムに同様の性質を引き起こすことを示し(定理 4.4)、非可換バナッハ関数空間が可分であるための必要十分条件は、対応する再配列不変バナッハ関数ノルムが絶対連続でフォンノイマン環の前双対空間が可分であることを示した(定理 4.9)。また、局所的測度収束列に対する抑制収束定理、絶対連続ノルムをもつ元全体と τ コンパクト作用素の閉包の包含関係についての結果などを得た。

以上、申請者は、「非可換化」の過程を、バナッハ関数空間に対して統一的に適用し新たな理論を構築した。審査員一同は、これらの成果などにより、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があるものと認定した。