博士（理　学）　森　山　洋　一

学位論文題名

Polycyclic groups of diffeomorphisms on the half-line

（半直線上の微分同相写像からなる多重巡回群）

学位論文内容の要旨

余次元1の葉層構造の葉の力学的な性質の研究は、1次元多様体上の微分同相写像のなすある種の群の力学的性質の研究に帰着する。このある種の群というのは、ホロノミー準群と呼ばれ、普通の群とは違い2つ要素の間に演算が必ずしも定義されていないような群（準群）である。すなわち、余次元1の葉層構造の葉の力学的性質は、対応するホロノミー準群の力学的定性論に集約されるといっても過言ではない。ホロノミー準群の力学的定性論及びホモロジー代数的一般論の展開によって多くの葉層構造に関する事実が証明されている。

我々の興味は多様体の葉層構造論においてもう一歩踏み込んだ部分にある。つまり、多様体が与えられたとき、その多様体がどのような葉層構造を持つか、逆に、葉層構造の性質を限定したとき、その葉層構造をもつ多様体はいかなるものかに興味をもつ。特に、リー群の作用によって定義される余次元1の葉層構造を持つ多様体はどのようなものであるかに興味をもつ。その動機の1つは、次の初歩的な例である。2次元の閉多様体で1次元リー群 $\mathbf{R}$ の作用で定義された葉層構造を持つものは、トーラスとクラインの壷しかない。この事が3次元以上ではどのような形の事実として表現されるであろうか。一般のn次元可換リー群 $\mathbf{R}^n$ の作用で定義される余次元1の葉層構造を持つコンパクト多様体については既に多くの結果が知られている(**[CR],[RRW],[T]**)。我々は、自然な発展として、べき零リー群の作用で定義された余次元1の葉層構造を持つコンパクト多様体について研究をした。まだ途中の段階であるが、その結果が［**M1**］や［**HGM**］である。さらに、可解リー群の作用による余次元1の葉層構造をもつ多様体についての研究が **[G], [P], [M2]** にある。しかし、まだまだ不十分なものである。よって、我々は、可解リー群の作用による余次元1の葉層構造をもつ多様体についての研究を深めることを目標にしており、そのために、そのような葉層構造の力学的性質の究明とそのような葉層構造を持つ多様体の例を作ることがまず最初の重要な課題である。そして、この事を行うために、対応する1次元多様体上の微分同相写像のなす群（葉のホロノミー群）の研究が不可欠である。この研究の結果が本論文である。本論文で得られた結果を述べる前に、まず、幾つかの語の定義から説明しよう。

1、群Γが多重巡回群(polycyclic group)であるとは、次のような部分群の列が存在するときにいう：

$\Gamma=\Gamma_0\supset\Gamma_1\cdots\supset\Gamma_n=\{e\}$　　ただし、各 $i=1,\cdots,n$ に対して Γ_i は Γ_{i-1} の正規部分群であり、Γ_{i-1}/Γ_iは巡回群である。

この多重巡回群 Γ は唯1つの極大なべき零正規部分群 N をもつ。この N を Γ のべき零根基(nilradical)という。可解リー群の離散部分群はこの多重巡回群となる。　このことから、可解リー群の作用で定義された余次元1

の葉層構造の葉のホロノミー群は多重巡回群となり、本論文の研究へとつながっていく。

2、$\mathbf{R}$ 上の アファイン写像； $x \mapsto ax+b$ （ただし $a>0$、b は定数） 全体のなす群を $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ で表し、区間 $[0,\infty)$ 上の C^r-級微分同相写像全体のなす群を $\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$ で表す。

$\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$ の部分群 Γ に対して、Γ_* を Γ の各要素を区間 $(0,\infty)$ に制限して得られる $(0,\infty)$ 上の C^r-級微分同相写像のなす群とする。このとき、Γ_* が $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ の部分群に C^r-共役であるとは、次のような C^r-級微分同相写像 $h:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ が存在するときにいう： $h\Gamma_* h^{-1}=\{h\circ f\circ h^{-1} | f\in\Gamma_*\}\subset\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$

さらに $\mathrm{Fix}(\Gamma)=\{x\in[0,\infty) \mid f(x)=x, \forall f\in\Gamma\}$ とおく。

さて、我々の得た結果は次の通りである。

［定理］ Γ を $\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$ の部分群でかつ多重巡回群であるとし、N を Γ のべき零根基とする。ただし、$r=2,\cdots,\infty$ とする。 $\mathrm{Fix}(\Gamma)=\{0\}$ と仮定するとき、次の事が成り立つ。

（i） $\mathrm{Fix}(N)=\{0\}$ の場合、 Γ_* は $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ の部分群に C^r-共役である。

（ii） $\mathrm{Fix}(N)\neq\{0\}$ の場合、 区間 $[0,\infty)$ 上のある縮小写像 $f\in\Gamma$ が存在して、Z_f を f によって生成される無限巡回群とするとき、 Γ は N と Z_f の半直積として表される。

この定理により、Γ の代数的な構造及び力学的な性質も完全にわかる。また、この Γ の例として、それぞれ定理の(i)と(ii)に対応する例が本論文においてあげられている。この例はすべての Γ を記述しているわけではないが、C^0-級の範囲では全てこれらの例に同型である。

References

[CR] G. Chatelet and H. Rosenberg, *Manifolds which admits* $\mathbf{R}^n$ *actions*, Publ. Math. IHES. 43(1974), 245-260.

[G] E. Ghys, *Actions localement libres du groupe affine*, Invent. Math. 82(1985), 479-526.

[HGM] G. Hector, E.Ghys and Y. Moriyama, *On codimension one nilfoliations and a theorem of Malcev*, Topology28(1989), 197-210.

[M1] Y.Moriyama, *Remarks on manifolds which admit locally free nilpotent Lie groups,* Hokkaido Math. J. 17(1988), 235-240.

[M2] 森山洋一, Polynomial growth をもつ solvable Lie group の action によって定義された foliation について，（修士論文）(1982).

[P] J.F.Plante, *Locally free affine group actions*, Trans.Amer.Math.Soc.259,(1980), 449-456.

[RRW] H.Rosenberg, R.Roussarie and D.Weil, *A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two,* Ann. Math. 91(1970), 449-464.

[T] D.Tischler, *Locally free actions of* $\mathbf{R}^{n-1}$ *on* M^n *without compact orbits*, Topology 13(1974), 215-217

学位論文審査の要旨

主査　教授　鈴木治夫
副査　教授　諏訪立雄
副査　教授　山口佳三
副査　助教授　西森敏之
副査　助教授　泉屋周一

学位論文題名

Polycyclic groups of diffeomorphisms on the half-line

（半直線上の微分同相写像からなる多重巡回群）

半直線$[0,\infty)$上のC^r-級微分同相写像からなる群$\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$の中の多重巡回部分群について、$r\geqq 2$の場合本質的に異なる二種類のものが存在することを確かめ、そのような部分群はこの何れかに分類されることを示した。

群Γにおいて、有限部分群列$\Gamma=\Gamma_0\supset\Gamma_1\supset\cdots\supset\Gamma_n=\{e\}$が存在し、$\Gamma_i$は$\Gamma_{i-1}$の正規部分群、$\Gamma_{i-1}/\Gamma_i$が巡回群となるとき、$\Gamma$を多重巡回群とよぶ。多重巡回群は一意的な$\{0\}$でない極大正規部分$N$を持つ。$N$を$\Gamma$のべき零根基とよぶ。写像$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$は任意の$x\in[0,\infty)$に対し、$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=0$となるならば、縮小写像とよばれる。主要な結果は次のように述べられる。

Γを$\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$の多重巡回群$r=2,3,\cdots\infty$とし、$N$を$\Gamma$のべき零根基、$\mathrm{Fix}(N)$を$N$の不動点集合とする。(i) $\mathrm{Fix}(N)=\{0\}$ならば、Γの$(0,\infty)$上への制限は直線$\mathbb{R}$の有向アファイン写像の群$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$の部分群に$C^r$-級共役、即ち$C^r$-級微分同相$h:(0,\infty)\underset{\rightarrow}{\cong}\mathbb{R}$が存在し、$h(\Gamma|_{(0,\infty)})h^{-1}$が$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$の部分群となる。(ii) $\mathrm{Fix}(N)\neq\{0\}$ならば縮小写像$f\in\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$が存在し、$\Gamma$は$N$と$f$によって生成される無限巡回群$\langle f\rangle$との半直積、即ち$\Gamma\cong N\rtimes\langle f\rangle$となる。

(i)に対する例：C^∞-級微分同相写像$\phi:\mathbb{R}\underset{\rightarrow}{\cong}\mathbb{R}^+=(0,\infty)$を$-\infty<t\leqq 0$に対し$\frac{1}{1-t}$, $0<t\leqq 2$に対し1から2に至るC^∞-級単調増加関数、$2<t<\infty$に対してtとなるように選ぶ。$\mathbb{R}$上の$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$-作用$\Psi$は、$\phi$によって$\mathbb{R}^+$上の作用$\Phi$を引き起こし、更に0に対する作用を0と定めることにより、Φは$[0,\infty)$上のC^∞-級作用に拡大される。従って、$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$は$\mathrm{Diff}^\infty[0,\infty)$

の部分群とみなされ、$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$は多くの多重巡回部分群を含む。$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$の多重巡回群は$\Gamma \cong \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}^k$の形をもち、$\Gamma$の$(0,\infty)$上$x \in (0,\infty)$の軌道は$n>1$のとき$[0,\infty)$-稠密となる。

(ii)に対する例：$A \in SL(n,\mathbb{Z})$, $0<\alpha<1$とし、${}^tA$が固有値αとその固有ベクトル$(a_1,\cdots,a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$を持つとする。$f \in \mathrm{Diff}^{r+1}[0,\infty)$ $(r=2,3,\cdots,\infty)$が存在し、$f \circ \Phi_t \circ f^{-1} = \Phi_{\frac{1}{\alpha}t}$となる。$A=(m_{ij})$ $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $g_i = \Phi_{a_i}$, $i=1,2,\cdots,n$とおくとき、

$$
\begin{aligned}
f^{-1} \circ g_i \circ f &= \Phi_{\alpha a_i} \\
&= \Phi_{\Sigma m_{ij} a_j} \\
&= g_1^{m_{1i}} \circ \cdots \circ g_j^{m_{ji}} \circ \cdots \circ g_n^{m_{ni}}.
\end{aligned}
$$

$N=\{g_1,\cdots,g_n\}$, $\Gamma_A=\{g_1,\cdots,g_n,f\}$とおくと、$N$は自由アーベル群で$\Gamma_A$の不変部分群、$\Gamma_A$は階数$\leqq n+1$の多重巡回群となる。$\Gamma_A$は$\mathbb{Z}^m \rtimes \mathbb{Z}$の形の群で、$p \in (0,\infty)$, $X_\Phi(p)=0$ならば、pのΓ_A-軌道は$(0,\infty)$の疎集合となる。

$\mathrm{Diff}^r[0,\infty)$の多重巡回部分群の研究は１９８４年、J.F. Planteによって始められたが、$\mathrm{Fix}(N)=\{0\}$の場合Γの元を$(0,\infty)$の微分同相写像とみて、Γが$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$の部分群に連続共役となることを示したに止まっており、$\mathrm{Fix}(N) \neq \{0\}$の場合の考察は全くなかった。申請者は$\mathrm{Fix}(N) \neq \{0\}$の場合が実際に起こることを上記例(ii)の構成によって確かめ、Γの分類を完成した。可解リー群の離散部分群は多重巡回群となるので、可解リー群の作用によって生ずる余次元１葉層構造のホロノミー群は正に主定理に言うΓの形を持つ。従ってこの分類は余次元１葉層構造を解明するための新しい重要な知見を与えたことになる。審査員一同は申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。