

Example of Zero Viscosity Limit for Two Dimensional Nonstationary Navier-Stokes Flows with Boundary

(境界を伴った Navier - Stokes 流の粘性消滅極限の例)

学位論文内容の要旨

$\mathbf{R}^m$ の領域 Ω における粘性係数 $\nu > 0$ の非圧縮性粘性流体の方程式 (NS) および, 非圧縮性完全流体の方程式 (EE) は, 次で与えられる:

$$(NS) \quad \begin{cases} u^\nu - \nu \Delta u^\nu + u^\nu \cdot \nabla u^\nu + \nabla p^\nu = f^\nu \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u^\nu = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ u^\nu = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T) \\ u^\nu = u_0^\nu \text{ in } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

$$(EE) \quad \begin{cases} \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \nabla \bar{p} = \bar{f} \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ \bar{u} \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T) \\ \bar{u} = \bar{u}_0 \text{ in } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

ただし $v(x, t) = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ に対し Δv の第 k 成分 $= \sum_{j=1}^m (\partial_j)^2 v_k$ であり, $v \cdot \nabla v$ の第 k 成分 $= \sum_{j=1}^m v_j \cdot \partial_j v_k$ である. なお, ∂_j は x_j についての偏微分である.

(NS) の速度ベクトル $u^\nu(x, t)$, 圧力 $p^\nu(x, t)$ および, (EE) の速度ベクトル $\bar{u}(x, t)$, 圧力 $\bar{p}(x, t)$ が未知関数である. また $f^\nu(x, t)$, $u_0^\nu(x)$, $\bar{f}(x, t)$, $\bar{u}_0(x)$ はそれぞれの与えられたデータである. なお $n = n(x)$ は, $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである.

(NS) の方程式から (EE) の方程式は, 形式的に $\nu \rightarrow 0$ とすることにより得られる. しかし境界条件の違いにより, それが解の収束, i.e. $u^\nu \rightarrow \bar{u}$ as $\nu \rightarrow 0$, に反映されるわけではない. この解の収束について調べるのが, 粘性消滅極限 (zero viscosity limit) の問題である. なお, ここでは圧力関数の収束は取り扱わない.

流体力学では, 粘性係数の小さい (Reynolds 数の大きい) 流体と完全流体の関係は, 次の様に理解されているようである. 境界から十分に離れた領域 (外部領域と言おう) は, 粘性の影響のない領域であり流体の運動は (EE) の方程式により記述される. 境界から $O(\nu^\alpha)$ as $\nu \rightarrow 0$ 程度の距離の部分, i.e. 境界層, において, 粘性は流体の運動に影響を与える. この境界層から遷移層を経て外部領域へと流体は移り変わる. しかし (NS) と (EE) の境界条件の違いから, 流体の速度ベクトルは境界上の 0 という値から急激な変化を伴い, 外部領域の

速度ベクトルへと変化して行くことになる。ゆえに全体の流体の中で、境界層は無視し得ない領域となる。これが、粘性の小さい流体の解析を困難にしているわけである。なお、この境界層が zero viscosity limit の数学的な取り扱いをも、同様に困難なものとしている。

さて zero viscosity limit の数学による解析であるが、そのほとんどが $\Omega = \mathbf{R}^m$ のときに限られる (参考文献 [1, 5, 7, 8, 14, 17])。 Ω の境界が空でないときは, Aano, K (参考文献 [2]) がある。これは $\mathbf{R}^m$ の半空間で (NS) と (EE) の解が解析的であるときを取り扱っている。しかしその議論は, Ω が有界なときには応用が出来ないと思われる。本論文の目的は, 広範なクラスのデータに対して zero viscosity limit を満たす解を与えることにある。

本論文の例を述べよう。本論文では境界層を考慮に入れて, zero viscosity limit を $L^2(\Omega)$ の中で取り扱った。この $L^2(\Omega)$ の中では, 次の定理 (本論文 Theorem 3 の一部) が成立する。

定理 A Ω を滑らかな境界を持つ 2 次元有界領域とし, $T > 0$ とする。 $\nu \rightarrow 0$ のとき $u_0^\nu \rightarrow \bar{u}_0$ in $L^2(\Omega)$, $f^\nu \rightarrow \bar{f}$ in $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ が成立しているとする。このとき, 次の命題 (a), (b) は同値である。

$$(a) \quad \|u^\nu(t) - \bar{u}(t)\| \rightarrow 0 \text{ as } \nu \rightarrow 0 \quad \text{uniformly (pointwisely) in } t \in [0, T].$$

$$(b) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \bar{u}(\tau) \cdot (n \times \text{rot } u^\nu(\tau)) \, dS d\tau = 0 \quad \text{uniformly (pointwisely) in } t \in [0, T].$$

ただし, $\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ のノルム, dS は $\partial\Omega$ の面素であり, ベクトル $v = (v_1, v_2)$ と スカラー q に対して $\text{rot } v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$, $v \times q = {}^t(v_2 q, -v_1 q)$ である。

以後, 定理 A の (a) を満たす解を構成する為 $\Omega = \{x = (x_1, x_2); |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ とし, 外力は $f^\nu = 0, \bar{f} = 0$ とする。最初に, (EE) の定常解から構成する。

$$\bar{u}(x) = \frac{\bar{\varphi}(r)}{r} n^\perp(x)$$

とおく。ただし, $n^\perp(x) = {}^t(-x_2, x_1)$ であり, 境界上では単位接ベクトルである。また $r = |x|$ とした。任意の $\bar{\omega}_0 \in C([0, 1])$ に対して $\bar{\varphi}(r) = \int_0^r \rho \bar{\omega}_0(\rho) \, d\rho$ とおくと $\nabla \bar{p} = - \int_0^r \bar{\varphi}^2(s) \cdot s^{-3} \, ds$ として, $(\bar{u}, \bar{p})$ は (EE) の定常解を与える。なお, これは Majda, A (参考文献 [12]) によって構成された解である。

(NS) の解もまた

$$u^\nu(x, t) = \frac{\varphi^\nu(r, t)}{r} n^\perp, \quad \nabla p^\nu = - \int_0^r (\varphi^\nu(s))^2 \cdot s^{-3} \, ds$$

の形に構成する。このとき, φ の適当な滑らかさの仮定のもとに

$$u^\nu - \Delta u^\nu + u^\nu \cdot \nabla u^\nu + \nabla p^\nu = (\varphi_t^\nu - \nu \varphi_{rr}^\nu + \frac{\nu}{r} \varphi_r^\nu) \cdot n^\perp, \quad \text{div } u^\nu = 0 \text{ for } 0 < r < 1, t > 0$$

である。故に初期条件 $u_0^\nu(x) = \frac{\varphi_0^\nu(r)}{r} \cdot n^\perp$ にたいし, $\varphi^\nu = \varphi^\nu(r, t)$ が

$$(E) \quad \begin{cases} \varphi_t^\nu - \nu \varphi_{rr}^\nu + \frac{\nu}{r} \varphi_r^\nu = 0 \text{ for } (r, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ \varphi_r^\nu|_{r=0} = 0, \quad \varphi^\nu|_{r=1} = 0 \text{ for } t \in (0, T), \quad \varphi^\nu|_{t=0} = \varphi_0^\nu \text{ for } r \in (0, 1), \end{cases}$$

を満たせば, (u^ν, p^ν) は (NS) の解である。ただし φ^ν の下付きの文字は, その文字についての偏微分である。(E) の解の存在については, 次の定理 (本論文 Theorem 1) を得た。

定理 B ある $0 < \alpha < 1$ に対して $\varphi_0^\nu \in C^{2+\alpha}([0, 1])$ が, $r = 0$ での整合条件 $\varphi_0^\nu(0) = \partial_r \varphi_0^\nu(0) = 0$ を満たすとする。このとき (E) の解 $\varphi^\nu \in C^{2,1}(Q)$ が一意的に存在して, 次を満たす。

$$\varphi^\nu(0, t) = 0 \quad \text{for } 0 \leq t < \infty, \quad |\varphi^\nu(r, t)| \leq \sup_{r \in [0, 1]} |\varphi_0^\nu| \quad \text{in } Q.$$

ただし, $Q = \{(r, t) \in [0, 1] \times [0, \infty); (r, t) \neq (1, 0)\}$, $C^{2+\alpha}$ は $2+\alpha$ 次 Hölder 空間, $C^{2,1}$ は x について 2 階偏微分可能, t について 1 階偏微分可能な関数の空間である.

ここで構成した (NS) の初期条件は, 境界上で整合条件 $\varphi^\nu(1) = 0$ を満たさない. それ故に, 境界では $t=0$ のとき不連続である (初期層).

以上構成された解を使って, zero viscosity limit in $L^2(\Omega)$ の例を与えよう. (NS) の初期条件において,

$$\varphi_0^\nu(r) = \int_0^r \rho \omega_0^\nu(\rho) d\rho$$

としよう. なお, $\text{rot } u_0^\nu = \omega_0^\nu(r)$ となる. このとき, 次が成立する (本論文 Theorem 2).

主定理 (EE) の定常解の渦を $\text{rot } \bar{u} = \bar{\omega}_0 \in C([0, 1])$ とし, 次を仮定する. (1) $u_0^\nu \rightarrow \bar{u}_0$ in $L^2(\Omega)$ as $\nu \rightarrow 0$. (2) $\|\omega_0^\nu\|_{L^2(0,1)} \leq M$ uniformly in $\nu > 0$. このとき, 任意の $T > 0$ に対して

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^\nu(t) - \bar{u}\| \rightarrow 0 \quad \text{as } \nu \rightarrow 0$$

となる.

この主定理は, 定理 A の (b) を示すことにより証明される. (E) の $\nu=1$ のときの解を $\psi = \psi(r, t)$ とおこう. ただし, 初期条件は $\psi|_{t=0} = \varphi_0^\nu$ とする. すると定理 B の解の一意性より, $\varphi^\nu(r, t) = \psi(r, \nu t)$ である. 故に, $\text{rot } u^\nu(x, t) = \varphi_r^\nu(r, t)/r = \psi_r(r, \nu t)/r$ である. 定理 A の条件 (b) において

$$\nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \bar{u}(\tau) \cdot (n \times \text{rot } u^\nu(\tau)) dS d\tau = \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \bar{\varphi}(1) \cdot (-\psi_r(1, \nu\tau)) dS d\tau = A \int_0^{\nu t} \psi_r(1, \tau) d\tau = (*).$$

ただし, $A = -2\pi \int_0^1 \rho \bar{\omega}_0(\rho) d\rho$ である. ここで, 次の補題を使う.

補題 $\psi_r(1, t)$ は $0 \leq t \leq T$ において, 次を満たす.

$$\left| \int_0^t \psi_r(1, \tau) d\tau \right| \leq 2 \int_0^T |\psi(1, \tau) - \psi(0, \tau)| d\tau + 2 \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\psi(r, t) - \psi(r, 0)| dr.$$

ただし, C は ν に無関係な正定数である.

故に,

$$(*) \leq 2 \int_0^{\nu T} |\psi(1, \tau) - \psi(0, \tau)| d\tau + 2 \int_0^1 \sup_{t \in [0, T]} |\psi(r, \nu t) - \psi(r, 0)| dr = I_1 + I_2.$$

定理 B より $\sup_Q |\psi(r, t)| \leq \sup_{r \in [0, 1]} |\varphi_0^\nu| \leq C \|\omega_0^\nu\|_{L^2(0,1)} \leq CM$ を得るので, 仮定 (2) より $I_1 \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ uniformly in $t \in [0, T]$. また ψ の連続性より, $\sup_{0 \leq t \leq T} |\psi(r, \nu t) - \psi(r, 0)| \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ pointwisely in $r \in [0, 1]$. さらに, 定理 B より $\sup_{0 \leq t \leq T} |\psi(r, \nu t) - \psi(r, 0)| \leq C \|\omega_0^\nu\|_{L^2(0,1)} \leq CM$ である. 故に, Lebesgue の収束定理により $I_2 \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ uniformly in $t \in [0, T]$. 以上から, 定理 A の (b) が示された. 証明終わり.

Remark φ^ν の初期条件 φ_0^ν が $r=1$, i.e. $\partial\Omega$, での整合条件 $\varphi_0^\nu(1) = 0$ を満たすとする. このとき $|\omega_0^\nu| \leq \nu^{-\epsilon}$ for $1 - \nu^{2\epsilon} \leq r \leq 1$ with $\epsilon < 1$ であっても

$$u^\nu \rightarrow \bar{u} \quad \text{in } C(K) \quad \text{for compact set } K \subset \bar{Q}$$

を満たす.

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 久保田 幸 次
副 査 教 授 上 見 練太郎
副 査 教 授 儀 我 美 一
副 査 教 授 岡 部 靖 憲
副 査 教 授 岸 本 晶 孝

学 位 論 文 題 名

Example of Zero Viscosity Limit for Two Dimensional Nonstationary Navier-Stokes Flows with Boundary

(境界を伴った Navier-Stokes 流の粘性消滅極限の例)

粘性流体の運動の方程式が完成したのは、前世紀の前半に Navier, Poisson, Saint-Venant 及び Stokes 達の研究によって完成され、現在 Navier-Stokes 方程式と呼ばれる形に確立されている。また、粘性の極めて小さい時の粘性流体に対し、“境界層”が認識されたのは、1905 年の Plandtl の論文に始まる。この境界層の数学的取り扱いであるが、(1) Navier-Stokes 方程式の近似方程式である Plandtl 境界層方程式を解析する、(2) Navier-Stokes 方程式の解 $\rightarrow$ Euler 方程式の解 (完全流体) as 粘性係数 $\rightarrow 0$ (zero viscosity limit) を何らかのノルムで証明する、このふたつがある。なお、申請者の参考論文の 2. 及び 3. もそれに当たる。しかし、領域の境界が空でない場合、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式の解の存在に対する研究に比べ、粘性流体の構造を研究する (2) のアプローチでは、公表された結果は何もなかったのが現状である。

申請者は本研究によって、zero viscosity limit を L^2 ノルムで実現する Navier-Stokes flow と Euler flow を、次の様に構成した。流体の存在する領域を、2 次元単位円盤とし、Navier-Stokes flow 及び Euler flow の初期値を radially symmetric vorticity を持つものとする。このとき、Euler flow は必然的に定常解になる (Majda, A.)。Navier-Stokes flow の存在を示すためには、その vorticity もまた初期条件と同様に radially symmetric vorticity を持つとして、

Navier-Stokes 方程式を原点で特異性を持つ流線の方程式になおし、その存在を示した。なお、この場合 vorticity の方程式から解の存在を示すのが一般的であるが、vorticity の境界条件が非線型になり、解の存在を示すのに困難を伴う。そこで流線の方程式を採用するのが、解の存在を示す為の point である。ただし、Navier-Stokes flow の初期条件が境界層を伴う場合も許容するために、必ずしも“初期条件の接線成分 $= 0$ ”は仮定しない。それ故に、構成された Navier-Stokes flow は初期境界において連続とは限らない。解の存在は、微分の評価と放物型方程式に対する Schauder 評価の組合せによりなされる。しかし、方程式が原点で特異性を持つことと、初期条件が境界で接合条件を満たさないということにより、技術的困難があった。本論文では、構成した Navier-Stokes flow に対して zero viscosity limit を L^2 ノルムで実現するために、その必要十分条件を境界上だけの条件で与えた。これにより、zero viscosity limit は流線の境界上の挙動の条件に書きなおされる。この条件は初期条件のエンタルピーが、粘性に対して一様有界であれば満たされる。これも、流線の方程式を直接解析することにより、証明されている。このことにより、zero viscosity limit in L^2 が実現されたことになる。本研究から、境界層は L^2 ノルム（エネルギーレベル）では、積分することによりキャンセルされる事が解る。これはすべての Navier-Stokes flow に対して成立する事を示した訳ではない。しかし、境界層の構造を直接調べると言うことに対して、何も手がかりがなかった状況に対し、 L^2 ノルムの“粘性 $\rightarrow 0$ ”のときの漸近挙動を調べるという新しい問題を与えたことにもなる。以上、申請者は粘性流体の境界層構造の数学的研究に対して著しい寄与をなした。審査員一同は申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認める。