学位論文題名

Generalized motion of hypersurfaces whose growth speed depends superlinearly on the curvature tensor

(曲率テンソルに関して優線形な成長速度をもつ超曲面の広義解)

学位論文内容の要旨

平均曲率流方程式にしたがう超曲面に関する研究は、極小曲面の問題などの幾何学的興味のほか、自然現象としてしばしばあらわれる界面の研究とも関連して、多くの研究者によっておこなわれてきた。しかし、初期曲面が滑らかであっても有限時刻で特異性があらわれてしまうことは早くから知られており、実際 Grayson は空間 3 次元の場合にそのような例を構成した (Duke Math. J., 1989 年)。このことは、任意に初期曲面を与えたときに、(特異性のあらわれる時刻をこえて) すべての成長を記述するためには、なんらか方法によって広義解を考える必要があることを云っている。

時刻 $t \geq 0$ をパラメータとしてもつ、 N 次元ユークリッド空間 R^N の超曲面を $\Gamma(t)$ とする (あとで定義する広義解では、かならずしも超曲面である必要はない)。 $\Gamma(t)$ の外向き単位法線ベクトルを $\vec{n}$, 成長速度の外向き法線方向成分を V とするとき、我々の考察する方程式は

$$V = f(\vec{n}, \nabla \vec{n}) \quad \text{on } \Gamma(t), \quad t > 0 \quad (1)$$

である。ただし、 f は与えられた関数で、ここでは連続関数と仮定する。法線ベクトル $\vec{n}$ は $\Gamma(t)$ の近傍に、法線方向に一定であるように拡張されているとする。それゆえ、 $\nabla \vec{n}$ は通常の意味での $\vec{n}$ の R^N における導関数である。 $f = -\text{div } \vec{n} / (N - 1)$ のとき、(1) は平均曲率流方程式と呼ばれる。初期超曲面 Γ_0 を任意に与えて、(1) と初期条件

$$\Gamma(t)|_{t=0} = \Gamma_0 \quad (2)$$

を満たす解 (超曲面の族) $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ を求めることは、もっとも基本的かつ重要な問題の一つである。

さきに述べたように、滑らかな時間大域解は平均曲率流方程式に対してさえ一般には期待できない。これを解決するために筆者らは、平均曲率流方程式を含む一般の方程式 (1) に対して新しい広義解の概念を導入し、初期曲面 Γ_0 が有界で、(1) が退化放物型かつ f が曲率テンソル $\nabla \vec{n}$ について線形の場合に、広義解の一意的かつ時間大域的な存在を証明した (J. Differential Geom., 1991 年)。

我々が一般的な方程式を考察するのは、それによって問題の構造が明解になるというだけでなく、例えば Gurtin の提唱する二相熱力学のモデル方程式

$$\beta(\vec{n}, V)V = - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}(\vec{n}) + c \right) \quad (3)$$

のような、非等方的な現象をとりあつかうためでもある。ただし、 β は正值関数、 H は正斉次一次関数、 c は定数とする。

ここで我々のいう広義解は、つぎのような考えかたで定義する(“等高面の方法”と呼ぶ)。 R^N 上の実数値連続関数 u を

$$\Gamma(t) = \{x \in R^N; u(t, x) = 0\}, \quad D(t) = \{x \in R^N; u(t, x) > 0\} \quad (4)$$

を満たすものとする($D(t)$ は $\Gamma(t)$ によって囲まれる領域である)。このとき、 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ が (1)-(2) の解であるためには、関数 u が初期値問題

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times R^N, \quad (5)$$

$$u(0, x) = a(x) \quad \text{for } x \in R^N \quad (6)$$

を満たさなくてはならないことは容易にわかる。ただし、 $F(p, X)$ は

$$F(p, X) = -|p|f(-\bar{p}, -Q_{\bar{p}}(X)/|p|) \quad (\bar{p} = p/|p|), \quad Q_q(X) = (I - q \otimes q)X(I - q \otimes q)$$

で定義する($p=0$ で値が定義されていないことに注意すべきである)。 Γ_0 が有界の場合、初期データ $a(x)$ は $\Gamma_0 = \{x \in R^N; a(x) = 0\}$, $D_0 = \{x \in R^N; a(x) > 0\}$ を満たす連続関数で、ある定数 $\alpha < 0$ に対して、 $a(x) - \alpha$ の台がコンパクトであるようにとる(このことを $a \in K_\alpha(R^N)$ と書く)。(5) は $\nabla u = 0$ に特異性をもつ退化放物型方程式である。(5)-(6) の粘性解 $u \in K_\alpha([0, T] \times R^N)$ ($\forall T > 0$) に対して、(4) で定まる $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ を、我々は (1)-(2) の広義解と定義する(もちろん、 $\{\Gamma(t)\}_{t \geq 0}$ が $a(x)$ の選びかたによらないことを示さなくてはならない)。この広義解の範疇では、 $\Gamma(t)$ はもはや R^N の超曲面である必要はない。

粘性解を一言で云うと、非線形退化放物型方程式に対して、解の比較定理の成り立つような弱解である。比較定理は解の一意性を導くと同時に、アプリオリな一樣評価を与えるので、解の存在証明にも応用される。 f が $\nabla \bar{n}$ について線形の場合には、 $F(p, X)$ は $(p, X) = (0, O)$ で連続に延長できたので、(5) の粘性解に対して比較定理が成り立った。

本論文で筆者は、成長速度を与える関数 f が曲率テンソルに関して優線形な場合に、先にえた結果を拡張した。これは (3) で云うと、 β が V によっている場合に相当する。ところが、 f が $\nabla \bar{n}$ について優線形の場合には、 F は $(p, X) = (0, O)$ で連続に延長できない。例えば $f = -(\text{div } \bar{n})^3$ の場合に計算すると、

$$F_*(0, O) = -\infty, \quad F^*(0, O) = \infty$$

となってしまう。ただし、 F_* は F の下半連続拡張、 F^* は上半連続拡張である。このよう場合には、(5) の勝手な粘性解に対しては、比較定理が一般に成立しない。そこで本論文では、関数の等高面の“成長速度”という概念を導入し、有限な成長速度をもつような (5) の粘性解に対して比較定理を証明した。有限な成長速度をもつという仮定は、 f が $\nabla \bar{n}$ について線形の場合には自動的に満たされており、連続な成長法則によって成長する曲面を考察するという我々の問題においては自然である。

解の存在に関しては、粘性解の理論ではペロンの方法を用いて構成するのが自然で、先にえた結果はこの方法にしたがっていた。我々の問題の場合、構成した粘性解に対して比較定理を適用するためには、それらが有限な成長速度をもっていないかなくてはならないが、従来の方法によってえられたものでは、その成長速度を直接評価することは出来なかった。そこで本論文では、

$$F_k(p, X) = (F(p, X) \wedge k|p|) \vee (-k|p|), \quad k = 1, 2, \dots$$

とおき, (5)-(6) のかわりに, 近似された初期値問題

$$u_t^k + F_k(\nabla u^k, \nabla^2 u^k) = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times R^N, \quad (7)$$

$$u^k(0, x) = a(x) \quad \text{for } x \in R^N \quad (8)$$

を考えた。 $F_k(p, X)$ は (p, X) について連続関数なので, これは既に解決されている場合にあたる。つまり, (7)-(8) の粘性解については比較定理が (無条件に) 成り立ち, 解はペロンの方法で構成される。

解の構成方法を復習して比較定理を用いれば, 成長速度は球対称解の場合に評価しておけば十分なことがわかる。筆者は, (7) の球対称解の成長速度を具体的に評価し, しかもそれが k に無関係なことを示した。このことと粘性解の安定性定理によって, 近似解 u^k が (5)-(6) の解 u に収束することが証明される。

本論文では, 第一節で我々の問題を定式化するとともに, 問題の背景や最近の結果について概括した。第二節では“成長速度”の概念を導入し, 広義解を定義して主定理を述べた。主定理の証明は第三節以降で述べたが, それは大きく四つに分けられる。第三節では読者の便宜をはかって粘性解の定義を述べ, いくつかの予備定理を証明した。比較定理の証明は第四節で完了する。ただし, そのなかである幾何学的補題を用いたが, それは本論文の主題とは異なっているので第六節に補足として置いた。最後に, 第五節で粘性解の存在定理を証明した。

学位論文審査の要旨

主査 教授 儀我美一
副査 教授 上見練太郎
副査 教授 久保田幸次
副査 教授 岡部靖憲
副査 教授 岸本晶孝

学位論文題名

“Generalized motion of hypersurfaces
whose growth speed depends
superlinearly on the curvature tensor”

(曲率テンソルに関して優線形な成長速度をもつ超曲面の広義解)

物質の2相を隔てる界面の運動は、非平衡・非線形の現象として学際的な関心を集めている。焼きなましによって純金属を作る過程でみられる粒界の動きは、外場を無視した粒界の幾何学的形状のみによるとしてもよい。このような界面の運動を記述する方程式を、曲面の発展方程式とよぶ。有名な例は、曲面の法線方向への成長速度が平均曲率に等しい平均曲率流方程式である。この種の方程式を厳密数学の立場から研究することは重要である。

解析学では、与えられた初期曲面に対し曲面の発展方程式の解は時間大域的に存在するかということが、まず問題になる。平均曲率流方程式による運動でも初期曲面がたとえ滑らかでも、パーベルがちぎれるように有限時間内で滑らかさを失ってしまうことがある。したがって滑らかな曲面の範囲では大域的には解けない。そこで特異点を許すように解の概念を拡張しなければならない。この点に関して、申請者らは、曲面をある関数の等高面とみなす、いわゆる等高面の方法を確立し、平均曲率流方程式

を含む多くの曲面の発展方程式の大域解をただひとつ構成することに成功した。

本研究では、等高面の方法をさらに一般の方程式に適用できるように拡張した。従来の理論では成長速度が曲率テンソルに1次的に依存する場合は扱えたが、それより大きな増大度をもつときは、鍵となる比較原理が従来の意味の解に対して成立せず、扱えなかった。これに対し、各等高面が有限速度をもつという条件を導入することにより、その性質をもつ解に限定することで比較定理を示した。また、このような解の存在も示した。以前の結果の拡張になっている。

比較定理に対し、より詳しく述べる。等高面の方法では、未知関数の各等高面が同一の曲面の発展方程式に従って動くことを要請する等高面方程式とよばれる偏微分方程式が基礎になっている。この方程式は等高面に垂直な方向に拡散効果がない退化放物形方程式である。また勾配がゼロになるところに特異点がある。このような特異退化放物形方程式に対しては、一般に滑らかな大域解は望めず、微分できない弱い解の概念が必要である。10年前にハミルトン・ヤコビ方程式に対して導入された連続性しかない粘性解がここでも重要である。本研究の基礎である比較原理とは、初期値の大小関係がずっと保存されているというものである。もとの曲面の発展方程式が本研究のような仮定の場合、等高面方程式の特異性が大きすぎ、申請者らの以前の比較定理が適用できない。本研究では、粘性解であるだけでなく、さらに各等高面のスピードにも制約を与えれば比較原理が成立することを示している。

このような制限をつけてしまうと、等高面方程式に対して制限付きの解が一般の初期値に対して存在するかという問題が生じる。この点に対して本研究では、もとの発展方程式を近似することにより、解の構成をしている。この場合、近似の精度によらずに等高面の速度が有限であることを示すのが鍵となる。

以上申請者は、非線形偏微分方程式である曲面の発展方程式の解析の基礎となる、等高面の方法において著しい研究成果を挙げた。

なお学位論文は、このままの形で微分方程式の国際誌である *Differential and Integral Equations* に掲載されることが決まっている。

審査員一同は、申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。