

学位論文題名

ON THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR IDEAL MAGNETO-HYDRO-DYNAMICS

(理想磁気流体力学に対する初期値境界値問題について)

学位論文内容の要旨

磁気流体力学 (Magneto-Hydro-Dynamics, MHD) の方程式系は、電気伝導性の流体が磁場のもとで行なう運動を記述する数理モデルの一つである。実在のプラズマに対しても、流体力学的取扱いが可能な限りにおいては、そのマクロな挙動をよく表現するものとして、天体の諸現象の解析や MHD 発電などに応用されている。この方程式系において、特に電気抵抗を 0 とおいたものを理想磁気流体力学 (Ideal MHD) の方程式系とよぶ。

本論文では、この理想磁気流体力学の方程式系に対する固定境界値問題を考察する。具体的には、2 種類の境界条件を提出し、その下で、この方程式系に対する初期値境界値問題の時間的局所古典解が一意的に存在するという、いわゆる解の存在定理を示すことを目的とする。

この存在定理を我々は、適当な反復法を通して近似解を構成することにより証明する。証明においては、反復法に付随する線形化問題に対する解の存在定理と、この存在定理をもとに構成された近似解に対する一様評価式を、非線形項を取り扱うのに十分な形で導くことが最も重要となる。ところで、この線形化問題は上記 2 種類のいずれの境界条件の下でも、線形対称双曲系に対する、境界が特性的な初期値境界値問題とみなすことができる。一方、フリードリックス、ラックスーフィリップス等に始まる、一般論の立場からの線形対称双曲系に対する研究があるが、これらの線形化問題には、そのいずれの結果も直接には適用できないことがわかる。そこで、以下に述べる様に、磁気流体力学の方程式系の持つ特殊性を十分に考慮しつつ、既存の理論の見直しと新たな工夫が必要となる。

各章の構成は次の通りである。第 1 章においては、以後の各章で使われる関数空間を定義し、一様評価式の導出において基礎となる関数積、合成関数に関する幾つかの基本的不等式を挙げる。次に、第 2 章では、磁場ベクトルの接線方向成分が既知の値をとり、速度ベクトルの法線方向成分を 0 とする境界条件の下での、理想磁気流体力学の方程式系に対する初期値境界値問題の時間的局所古典解の一意的存在定理を示す。この章は、更に以下の 4 つの小節に分けられる。2・1 節では問題設定を行い、得られた結果を定理の形にまとめる。2・2 節では、線形化問題を非特性化した初期値境界値問題について調べる。2・3 節では、前節の結果をもとに非特性化した iteration scheme を定義し、これを通して近似解を構成する。更に、得られた近似解に対する一様評価式を導く。このとき、この章で考察している境界条件の下での、磁気流体力学の方程式系の特殊性を用いることにより、通常のソボレフ空間における一様評価式が得られる事に注意する。2・4 節においては、この一様評価式をもとにして近似解の収束性を検討し、その極限をもって求める解の存在を示す。

第3章では、境界が完全導体壁よりなる場合に適当と思われる境界条件を提出し、その境界条件下での、理想磁気流体力学系に対する初期値境界値問題の時間的局所古典解の一意的存在定理を示す。この章は、次の6つの小節に分けられる。まず3・1節では、問題設定を行い、定理の主張を述べる。3・2節は、境界が完全導体壁よりなる場合の境界条件を数学的に厳密に導出することを目的とする。そして、以下の節では、この完全導体壁の境界条件において、特に磁場ベクトルの法線方向成分が常に0となる場合の存在定理を証明する。即ち、3・3節では、この境界条件の下での線形化問題に対する存在定理を、あるア・プリオリな一様評価式を仮定した上で証明する。このとき、この線形化問題は次に挙げる2つの特徴を持つことに注意する。第一の特徴は、磁場ベクトルの法線方向成分が0であるという条件を、境界条件とは見なさずに初期値のみに対する制限と見なせることである。この事実より、境界条件の極大非負性が従い、線形化問題の L^2 -適切性が示される。第二の特徴は、この線形化問題の境界行列が、境界上で強く退化しているので、第2章で扱った問題の様に通常のソボレフ空間における一様評価式を得ることが困難と思われる点である。言い換えれば、この線形化問題においては、「解の法線方向成分の滑らかさの欠落」が起っているものと思われる。そこで、我々は新たに接線微分のオーダーが法線微分のオーダーの2倍となる重み付きソボレフ空間を導入し、この空間の中で従来と異なるエネルギー評価法を行なうことにより上で述べた困難を切り抜ける。具体的には、3・4節において、この新しいエネルギー評価法を用いて、前節で仮定したア・プリオリな一様評価式の証明を行う。続いて3・5節では、前節までに得られた結果を使い、求める理想磁気流体力学の方程式系に対する初期値境界値問題の解の存在を、反復法を通して証明する。ただし、ここでは解の時間変数に関する強連続性は、まだ示されていない。この強連続性については、3・6節において、ラウチによって導入された接線方向変数に対するモリファイアーを本質的に用いることによって証明される。以上で第3章の主定理の証明を終わる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 上 見 練太郎
副 査 教 授 久保田 幸 次
副 査 教 授 儀 我 美 一
副 査 教 授 岡 部 靖 憲
副 査 教 授 岸 本 晶 孝

学 位 論 文 題 名

On the initial boundary value problems
for ideal magneto-hydro-dynamics

(理想磁気流体力学に対する初期値境界値問題について)

理想磁気流体の磁場、速度、圧力、密度を未知関数とする運動方程式系は古くから確立されていたが、物理的にも自然な完全導体壁を境界とする初期境界値問題の時間局所解の一意存在という最も基本的な事実が今まで証明されていなかった。磁場を考慮に入れない比較的簡単なオイラー方程式に対して、速度の法線成分が境界上零となるという自然な境界条件の下で同様の問題の解決が成されたのが約10年前である。

流体の運動方程式系の多くは数学的には一階の準線型対称双曲型方程式系の理論の枠組の中にある。この対称双曲型方程式系に対する初期境界値問題の組織的研究は1960年代から始まり、解の存在はエネルギー不等式と線形化された方程式系の解のソボレフ空間での一様評価により証明された。一様評価を得るためには「境界行列」が重要な役割を果す。今までは、「境界行列」の階数が境界上退化しない場合か、退化しても境界の近傍で一定の階数をもつ場合に一様評価が得られていた。理想磁気流体の運動方程式に対する初期境界値問題は上に述べた枠組に入らず、「境界行列」が境界上のみで退化しており、困難な問題として残されていた。

本研究で、申請者は二種類の境界条件の下で理想磁気流体の運動方程式に対する初

期境界値問題の時間局所解の存在を証明している。第一は速度に関する境界条件は上で述べたオイラー方程式と同じで、磁場に関する境界条件は境界上磁場の接線成分を与えるというものである。この場合は「境界条件」の退化の構造が比較的取扱いやすく、磁場の発散が零であるという関係式で法線ベクトル場を支配して、線形化方程式系の通常のソボレフ空間での一様評価を得た。第二は物理的にも自然な完全導体壁を境界とするものである。この場合で最も困難な境界条件は速度についてはオイラー方程式の境界条件と同じで、磁場については磁場の法線成分が境界上消えているというものである。申請者はこの困難さを克服するためにまず新しいウェイト付きソボレフ空間を導入した。この関数空間での特長は、接ベクトル場の仲間に通常の接ベクトル場の外に境界上で零となる法ベクトル場も入れ、また接ベクトル場の階数が法ベクトル場の2倍になっていることである。次に、磁気圧を含む新たな未知関数を導入し「境界条件」の退化の構造を明らかにした。更に、磁場に関する境界条件を境界条件に組込むのは境界値問題の理論上数学的無理があるが、この困難さを線形化方程式を改良することによって解決した。これらによって、線形化された方程式系の解のウェイト付きソボレフ空間での一様評価を得た。

以上、申請者は、理想磁気流体の運動方程式に対する初期境界値問題の上に述べた研究成果を通して、一階準線形対称双曲型方程式系に対する初期境界値問題の構造解明に著しい寄与をなした。

この学位論文の内容は既に国際誌、Communications in Mathematical Physics (1991) (松村明孝氏との共著) 及び Hokkaido Mathematical Journal (1987) に掲載され、国際的に評価されている。

審査員一同は、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。