

学位論文題名

Completely positive completion of partial matrices
whose entries are completely bounded maps

(完全有界写像を成分にもつ部分行列の完全正補完)

学位論文内容の要旨

部分行列とは確定した成分と未定の成分とをもつ行列である。部分行列の completion の問題はこの未定の成分を補い、与えられた条件を満たすような行列を得ることを扱う。この問題は、成分がスカラーあるいはヒルベルト空間上の有界線形作用素の場合に正值性、縮小性等の条件の下で研究されている。例をあげると H. Dym, I. Gohberg (1981) は帯行列が positive completion をもつための条件、すなわち帯行列の completion で正定値となるものが存在するための条件を与えている。また R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sá, H. Wolkowicz (1984) は有限グラフ G から定義されるスカラー成分の G -部分行列が positive completion をもつための条件を G の性質を用いて特徴付けている。一方 V. I. Paulsen, S. Power, R. R. Smith (1989) は部分行列を行列環の部分空間の上の Schur 積写像とみなし、写像としての観点から completion の問題を扱っている。

本論文は C^* 代数 A のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体 $B(\mathcal{H})$ への完全有界写像を成分にもつ有限グラフ G から定義される G -部分行列を対象として、これが CP completion をもつための条件について研究している。ここで G はループをもつ位数 n の無向グラフであり、 G -部分行列とは確定成分が G の辺の集合と対応しているものである。 G -部分行列の completion は、各成分ごとの対応により A の元を成分にもつ n 次行列の全体 $M_n(A)$ から $M_n(B(\mathcal{H}))$ への写像を定義する。このとき CP completion とはこの写像が完全正值写像であることを表わす。

完全有界写像を成分にもつ部分行列は Paulsen らが導入した Schur 積写像を典型的な例としてもっている。本論文では彼らの研究を一般化した結果を得ている。また Grone らは成分がスカラーの場合を扱っているが、本論文では彼らの結果を完全有界写像の場合に拡張している。さらに写像を成分にもつ部分行列の具体的なモデルとして、局所

コンパクト群の Fourier 代数の完全有界乗関数から定まる完全有界写像を成分にもつ G -部分行列を与え、これが CP completion をもつための条件を特徴付けている。

G を有限無向グラフ、 Φ を完全有界写像を成分にもつ G -部分行列とする。もし Φ の確定成分から得られる主小行列がすべて完全有界写像ならば Φ は G -部分完全正值行列とよばれる。 Φ が CP completion をもつならば Φ は G -部分完全正值行列でなければならないが、逆は一般には成立しない。

最初に、すべての G -部分完全正值行列が CP completion をもつための必要十分条件は G が chordal であることが証明される。これは G -部分行列に対する Stinespring 型の同時表現を用いると、 C^* 代数の表現の可換子環の作用素を成分にもつ G -部分行列の positive completion の可能性の問題に帰着される。これに Grone らの議論を用いることにより証明することができる。この結果は Grone らの結果の一般化となっている。

上の結果からグラフが chordal でない場合が考察の対象となる。このとき完全有界写像の特別な場合である有界線形汎関数を成分とする部分行列が CP completion をもつための条件が与えられる。

成分が有界線形汎関数である n 次行列が $M_n(A)$ から n 次複素行列の全体 M_n への写像として正值であるならば必然的に完全正值写像となることがわかる。実際より一般的に、 A の M_m への有界線形写像を成分とする n 次行列が $M_n(A)$ の $M_n(M_m)$ への m 正值写像を定義するならば、完全正值であるということが示される。この結果はそれ自身、 A の M_m への m -正值写像は完全正值であるという事実の、行列化としての拡張となっている。このことを用いると、 G -部分行列の CP completion が存在することと positive completion、すなわち $M_n(A)$ の上の正值写像を定める completion が存在することは同値となることがわかる。

グラフ G に対し $M_n(A)$ の単位元を含む自己共役な部分空間 $S_G(A)$ がグラフから標準的に定義される。また G -部分行列 Φ に対し、 $S_G(A)$ の M_n への写像 Λ_Φ が各成分ごとの対応により自然に定義される。このとき Φ が positive completion をもつための必要十分条件は写像 Λ_Φ が正值なことであることが示される。さらにこれは、 Φ の各成分が A の表現と表現空間の n 個のベクトルによって表示されることと同値であることが示される。これらは C^* 代数の部分空間上の正の汎関数に関する Krein の拡張定理を用いて示される。さらに 2 次のブロック拡大を用いて同様の議論を行うことにより、有界線形汎関

数を成分にもつ (必ずしもループをもたない) 有向グラフ G の縮小的 G -部分行列の表現を得ることができる. すなわち Λ_Φ が縮小写像ならば, Φ の各成分を Λ の表現と表現空間のノルムが 1 以下の $2n$ 個のベクトルを用いて表わすことができる. さらに系として, 部分行列 Φ の completion で Λ_Φ のノルムを変えないものが存在することがわかる. これらの結果は Paulsen らの結果の一般化となっている.

上述の結果は局所コンパクト群 G の群 von Neumann 代数 $VN(G)$ 上の特別な完全有界写像に応用される. すなわち G の Fourier 代数の完全有界乗関数 φ から誘導される $VN(G)$ 上の乗関数写像 M_φ を成分にもつ G -部分行列が CP completion をもつための条件が与えられる. M_φ が完全正值写像であるための φ の条件より, G -部分完全正值行列 $\Phi = [M_{\varphi_{ij}}]_G$ の各成分 φ_{ij} は G のユニタリー表現の係数の空間 $B(G)$ の元であることがわかる. このことから CP completion については成分が $B(G)$ の元の場合を考えれば十分であることがわかる. 最初に $B(G)$ を群 C^* 代数 $C^*(G)$ の双対空間と同一視して, $B(G)$ の元を成分にもつ n 次行列 $\Phi = [\varphi_{ij}]$ が $M_n(C^*(G))$ の M_n への写像として正值であることと, Φ から定義される G 上の行列値関数が正定値であることが同値であることが示される. さらにこの条件は, 乗関数写像 $M_{\varphi_{ij}}$ を成分にもつ n 次行列が $M_n(VN(G))$ 上の完全正值行列を与えることと同値であることが示される. このことと成分が線形汎関数の部分行列の場合の completion の結果を用いることにより, 補う写像を乗関数写像に制限した場合に乗関数写像を成分にもつ G -部分行列 Φ が CP completion をもつことと, 対応する $B(G)$ の元を成分にもつ G -部分行列が positive completion をもつことが同値であることがわかる. さらに群の従順性等の条件の下で, Φ が乗関数写像に制限した場合に CP completion をもつことと, $VN(G)$ 上の一般の完全有界写像による CP completion をもつことが同値であることが示される.

学位論文審査の要旨

主査	教授	安藤	毅
副査	教授	岡部	靖憲
副査	教授	岸本	晶孝
副査	教授	儀我	美一
副査	教授	中路	貴彦

学位論文題名

Completely positive completion of partial matrices
whose entries are completely bounded maps

(完全有界写像を成分にもつ部分行列の完全正補完)

部分行列とは確定した成分と未定の成分とを持つ行列である。部分行列の補完問題は、この未定の成分を補い、与えられた条件を満たす行列を構成できるかどうかを扱う。この問題は、成分がスカラーあるいはヒルベルト空間上の有界線形作用素の場合に正值性及び縮小性等の条件を中心に研究されてきた。

本論文で申請者は、 C^* 代数 A からヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体 $B(\mathcal{H})$ への完全有界写像を成分にもつ有限グラフ G から定義される G -部分行列を対象として、これが完全正值補完をもつための条件について研究している。

ここで G は各頂点にループを持つ位数 n の無向グラフであり、 G -部分行列とは G の辺に対応する箇所に確定成分が与えられたものである。 G -部分行列の完全正值補完とは、未定のところを補って、各成分ごとの対応により $M_n(A)$ から $M_n(B(\mathcal{H}))$ への写像を定義し、その写像を完全正值写像にしようとするものである。

完全有界写像を成分にもつ G -部分行列の確定成分からえられるどの主小行列も完全正值写像であるとき、この G -部分行列は G -部分完全正值行列とよばれる。申請者は、グラフ G に対して、そのすべての G -部分完全正值行列が完全正值補完をもつ必要かつ十分条件は G が chordal グラフ、すなわちどの最短サイクルも長さ 3 であることである

ことを証明した。この G に対する条件自身は、スカラーまたは有界線形作用素を成分にもつ部分行列の正値補完に関しての場合と同一であるのは興味あるところであるが、申請者は完全正値写像に関する Stinespring の表現定理を媒介として、Grone 等の確定成分が行列の場合の正値補完の結果に帰着することにより達成している。

この結果から、個々の G -部分完全正値行列の完全正値補完可能性の検証は G が chordal でない場合のみが対象となる。正値補完に関しては、Paulsen 等は行列を確定成分にもつ G -部分行列を行列環のある部分空間の上の Schur 積型写像とみなし、写像としての観点から補完の問題を扱っている。申請者は、完全有界写像の特殊な場合である有界線形汎関数を成分とする部分行列の完全正値補完を追求している。

まず申請者は、成分が有界線形汎関数である n 次行列が $M_n(A)$ から n 次複素行列空間 M_n への写像として正値であれば必然的に完全正値写像となるという基本的な事実を確立して、完全正値補完の問題を正値補完の問題に帰着させた。

グラフ G に対し $M_n(A)$ の単位元を含む自己共役な部分空間 $S_G(A)$ が G から標準的に定義される。また G -部分行列 Φ に対し $S_G(A)$ の M_n への写像 Λ_Φ が各成分ごとの対応により自然に定義される。このとき Φ が正値補完をもつための必要十分条件は写像 Λ_Φ が正値なことであることを示した。これ等は C^* 代数の部分空間上の正の汎関数に関する Krein の拡張定理を用いて達成された。

申請者は、この結果を局所コンパクト群 G の群 von Neumann 代数 $VN(G)$ 上の特別な完全有界写像に応用した。すなわち G のフーリエ代数の完全有界乗関数 φ から誘導される $VN(G)$ 上の乗関数写像 M_φ を成分にもつ G -部分行列が完全正値補完をもつための条件を求めた。まず各成分は G のユニタリ表現の係数関数のなす空間 $B(G)$ の元とみなすことができることを示した。次に $B(G)$ を群 C^* 代数 $C^*(G)$ の双対空間と同一視して、 $M_n(C^*(G))$ から M_n への写像の正値性の問題に帰着させた。

さらに申請者は、群に従順性 (amenability) があるときは、乗関数写像に制限して完全正値補完をもつことと、 $VN(G)$ 上の一般の完全有界写像による完全正値補完をもつことが同値であることも示した。

以上申請者の研究は、部分行列の補完の問題に新しい重要な寄与をなすもので、博士 (理学) の学位を得るにふさわしいものである。