

学 位 論 文 題 名

One-dimensional Perturbation of the Shift

(シフトの一次元の摂動)

学位論文内容の要旨

ヒルベルト空間上の等長作用素は、単独の作用素としてみたとき既にその構造が十分よくわかっている。たとえば、Wold分解によってユニタリの部分とシフトの部分の直和にわけられ、シフトの部分はその重複度だけで分類でき、スペクトルの状態はもちろん不変部分空間も Beurling-Lax-Halmos の定理によりすべて記述できる。一方、ユニタリの部分は、さらに単位円周上の Lebesgue 測度に関して絶対連続な部分と特異的な部分の直和にわけられ、それらのスペクトル分解を考えることによりほとんどすべてのことが記述できる。

本論文では、ヒルベルト空間上の等長作用素の 1 次元の摂動、すなわち等長作用素との差が階数 1 である縮小作用素を対象に、その構造を研究している。ヒルベルト空間上の縮小作用素の体系的な研究は、Sz.-Nagy-Foias や de Branges によって 1960 年代から行なわれており、それぞれが自分たちの研究をまとめ出版した著書はすでに古典となっている。しかし、彼らの理論によって縮小作用素に関するすべての事がわかっているわけではなく、現在も彼らを含めた多くの研究者によって縮小作用素の構造の研究が行なわれている。本論文では、特定の縮小作用素を摂動という立場から見ることによって、新しい結果を得ている。特に、具体的かつ典型的な等長作用素である単位円板上の Hardy 空間上のシフト作用素について、その 1 次元の摂動をさらに詳しく考察している。

この様な対象の研究は、D. N. Clark による restricted shift の 1 次元摂動の研究 (1972) や、さらには M. S. Livsic による quasi-unitary の研究 (1946, 1950) にまで遡れる。しかし、それらの研究は本論文とは別な視点からの問題の設定がなされており解析法も異なる。本論文では Clark の結果を新しい角度から見直してさらに発展させている。また、D. Sarason は最近

の研究(1986-1990)でシフトの1次元の摂動の非常に特殊な場合を別な形で扱っているが、本論文ではそれを包括する結果を得ている。

まず、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の等長作用素 V に対し、それとの差が階数1である縮小作用素 R は必然的に $V + (\alpha - 1)g \otimes V^*g$ の形になることがわかる。ただし、 g は $\mathcal{H}$ の単位ベクトルで α は絶対値1以下の複素数である。これらの作用素のうち、再び等長作用素であるものは $|\alpha| = 1$ に対応し、等長作用素でないものは $|\alpha| < 1$ に対応する。 V と g を固定したとき、1次元摂動の族 $\{V + (\alpha - 1)g \otimes V^*g : |\alpha| \leq 1\}$ のユニタリ不変量として、単位開円板上の解析関数 ω を導入する： $\omega(z) = \langle zV^*(I - zV^*)^{-1}g, g \rangle / \langle (I - zV^*)^{-1}g, g \rangle$ 。1次元の摂動を ω と α をパラメーターとして記述し具体的な計算を行なうことが、この研究のキーポイントである。

考察の対象は、摂動が等長作用素の場合と等長作用素でない場合に分けられ、それぞれ更に、もとの等長作用素が一般の場合とシフトの場合とに分けて議論される。

等長作用素の1次元の摂動が再び等長作用素であるとき、それがユニタリ部分を持つかどうかを判定する条件を ω を使って与えることができる。これは、cyclicな等長作用素の関数空間上の積作用素への表現を用いて、Fatouの定理などにより証明できる。さらに、もとの等長作用素がユニタリ部分を持たないならば、1次元の摂動のユニタリ部分は特異的であり重複度が1であることがわかる。また、これのある意味での逆問題として、任意に重複度1の特異的ユニタリ作用素が与えられたとき、これをシフトのある1次元の摂動のユニタリ部分として実現できることも示せる。この結果の系として、どんな特異的ユニタリ作用素もシフトのトレース族の摂動によって得られるというCarey-Pincusの定理に、構成的な証明を与えることができる。

1次元の摂動が等長作用素でない場合には、まずユニタリ部分の有無はもとの等長作用素のユニタリ部分と摂動項の単位ベクトル g との関係によって決まり、もとの等長作用素がユニタリ部分を持たないならば、1次元の摂動 R は常にSz-Nagy-Foiasの意味で C_0 クラスに入る。すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき R^{*n} は0に強収束する。これは、 R の最小等長伸張がある等長作用素の1次元の摂動になることから、上の結果を適用してそれがユニタリ部分を持たないことを示すことにより証明される。さらにこの場合には、 R が C_0 クラスであることを使って、その作用素値特性関数を求めることができる。これは、 g と α と ω によってはっきりと書き表すことができる。作用素値特性関数は縮小作用素の

完全ユニタリ不変量であるから、このことから系として、不足指数が $1, m+1$ ($1 \leq m \leq \infty$) であるすべての C_0 クラス作用素が重複度 m のシフトの 1 次元の摂動となることを証明できる。

次に、もとの等長作用素として特に重複度 1 のシフト、すなわち Hardy 空間 H^2 上のシフト作用素 S について、その 1 次元の摂動をより詳しく調べる。このとき、 ω と g の関係は、単位円周上の関数として明示的に表わされる。

シフトの 1 次元の摂動 $R = S + (\alpha - 1)g \otimes S^*g$ (g は H^2 の単位ベクトル) について、まずこれが等長作用素でない場合には、この最小等長伸張は重複度 2 のシフト $S \oplus S$ とユニタリ同値になり、このユニタリ同値を与える $H^2 \oplus H^2$ 上のユニタリ作用素が g と α と ω を用いて書き表せる。実際それは、非有界な Toeplitz 作用素の積と有界な Toeplitz 作用素を要素とするブロック行列の形で得られる。これからさらに、 R の 2 通りの de Branges モデルを求めることができる。また、 g と $\omega - \alpha$ が共通の内部関数を因子として持たないという仮定のもとで、 R の不変部分空間の束を決定でき、それがシフトの不変部分空間の束と同型であることがわかる。これは、Sz.-Nagy-Foias の一般論よりもかなり見やすい形である。 R の可換子環についても、同じ仮定のもとでその形を決定できる。すなわち、 R の可換子環は R の H^∞ -functional calculus の全体である。内部関数の共通因子についての仮定が本質的で不可欠であることは直ちに分かる。

上の R が等長作用素の場合、すなわち $|\alpha| = 1$ のときには、 H^2 族関数 $g_\alpha = (1 - \omega)g / (1 - \bar{\alpha}\omega)$ が単位ベクトルであるかないかに応じて、 R はシフトとユニタリ同値であったり特異的ユニタリ部分を持ったりする。何れの場合も、 R のシフト部分と S との間のユニタリ同値を与えるユニタリ作用素は、前と同じように非有界 Toeplitz 作用素の積によって具体的に書き表せる。この表示によって、 R のユニタリ部分が作用する部分空間 M の形も求められ、Sarason によって研究されたいわゆる近不変部分空間の形をしていることがわかる： $M = T_h(H^2 \ominus \varphi H^2)$ 。この M を表わす H^2 族関数 h と内部関数 φ も、 g と α によってはっきりと決まる。さらに、 R のユニタリ部分のスペクトル分解も、ある関数空間上の積作用素としての表現によって与えることができる。これは、Clark の結果を含むものである。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 安 藤 毅
副 査 教 授 岸 本 晶 孝
副 査 教 授 中 路 貴 彦
副 査 助 教 授 高 橋 勝 利

学 位 論 文 題 名

One-dimensional Perturbation of the Shift

(シフトの一次元の摂動)

申請者はヒルベルト空間上の等長作用素に1次元だけの摂動を加えて得られる線形作用素が縮小作用素の性質を保つときに、その構造を詳細に解明した。特に、典型的な重複度1の等長作用素である単位円板上のHardy空間 H^2 上のシフト作用素の1次元摂動をさらに詳しく考察している。

申請者はまず、等長作用素 V の1次元の縮小的な摂動 R は、単位ベクトル g と絶対値が1以下の複素数 α をパラメータとして $R=V+(\alpha-1)g\otimes V^*g$ の形で決まることから出発する。ここで $|\alpha|=1$ のときが丁度 R がまた等長作用素になることに対応する。さらに、単位ベクトル g を共有する縮小的な1次元摂動の族のユニタリ不変量として、単位開円板上の解析関数 $\omega(z)\equiv\langle zV^*(I-zV^*)^{-1}g,g\rangle/\langle(I-zV^*)^{-1}g,g\rangle$ を導入し、摂動 R を記述するパラメータとして $\omega(z)$ と α を使って詳しい解析を行うのが、申請者の卓越した着眼である。

1次元摂動 R がまた等長作用素になるとき、すなわち $|\alpha|=1$ のとき、申請者は R がユニタリの部分をもつかどうかを、関数 $\omega(z)$ の境界値の状況で判定する方法を確立した。もとの等長作用素 V がユニタリ部分を持たないときには、 R のユニタリ部分は特異的で重複度は常に1であることを突き止めている。また、この逆問題として申請者は、どんな重複度1の特異的なユニタリ作用素も、シフトのある1次元摂動のユニタリ部分として実現することも証明している。この結果の系として、どんな特異的ユニタリ作用素もシフトのトレース族の摂動によって実現できるというCarey-Pincusの定理に構成的な証明を与えることができる。

次に1次元摂動 R が等長ではない縮小作用素のとき、すなわち $|\alpha| < 1$ を考察する。 R がユニタリ部分を持つかどうかは、 V のユニタリ部分の有無と g との関係によって決まる。申請者は、 V がユニタリ部分が持たないときは、 R はユニタリ部分を持たないばかりか、 $n \rightarrow \infty$ のとき R^{*n} は0に強収束すること、別の用語を使えば R が C_0 クラスの縮小作用素であることを見いだした。一般にユニタリ部分を持たない縮小作用素に対しては、その完全なユニタリ不変量である特性関数と呼ばれる開円板上の作用素値関数が定義されるが、申請者はいま対象となっている R の特性関数は $g, \alpha, \omega(z)$ を使って具体的に表示できることを示している。また、逆問題として、不足指数が $1, m+1$ ($1 \leq m \leq \infty$)のどんな C_0 クラスの縮小作用素も、重複度が m のシフトの1次元摂動として実現できることを確立した。

次に申請者は、もとの等長作用素が重複度1のシフト、すなわちHardy空間 H^2 上のシフト作用素 S の場合の縮小的な1次元摂動 $R = S + (\alpha - 1)g \otimes S^*g$ を特に詳しく考察している。この場合は、 g も H^2 の関数である。

まず申請者は、 R が等長作用素でない場合、すなわち $|\alpha| < 1$ のときは、その最小等長伸張は $S \oplus S$ とユニタリ同値であることを示した、さらに、その同値性を実現する $H^2 \oplus H^2$ 上のユニタリ作用素が g, α を使った非有界なToeplitz作用素の積、有界なToeplitz作用素を要素に持つブロック(作用素)行列で書き表せることを見いだした。 $g(z)$ と $\omega(z) - \alpha$ が互いに素という条件の下に、 R の不変部分空間のなす束が、シフト S の不変部分空間のなす束に同型であり、また R と可換な作用素は H^∞ の関数 $u(z)$ を使って $u(R)$ と表示できることを示した。

R が等長作用素である場合、すなわち $|\alpha| = 1$ ときは、申請者は関数 $g_\alpha(z) \equiv (1 - \omega(z))g(z) / (1 - \bar{\alpha}\omega(z))$ の H^2 -ノルムが1であるかどうかに応じて、 R はシフトとユニタリ同値であったり特異的なユニタリ部分を持ったりすることを確認し、 R のシフト部分と S との同値性を与えるユニタリ作用素を具体的に構成している。 R のユニタリ部分のスペクトル分解も、具体的なある関数空間上の積作用素として実現している。

作用素の1次元摂動に関しては、ClarkやLivsic等の研究があるが、申請者は異なる視点からの考察により更に深い結果に到達し、彼等の結果を発展させるばかりでなく、最近のSarasonの結果をも特殊な場合として含む一般的な結果をえている。

以上申請者の研究は、この分野の研究をほぼ完成の域にまで押し進めたものであり、博士(理学)の学位を得るにふさわしいものである。