

学 位 論 文 題 名

Maximal ideals and Carlson's conjecture for cohomology rings of modules

(加群のコホモロジー環の極大イデアルと Carlson の予想)

学位論文内容の要旨

G を有限群、 K を標数 $p > 0$ の体、 M を有限生成 KG -加群とする。

$$E_G(M) = \text{Ext}_{KG}^*(M, M) \simeq H^*(G, \text{End}_K(M))$$

はカップ積と $\text{End}_K(M)$ の合成積で次数付き K -多元環となる。自明な加群 K に対する $E_G(K)$ は (殆ど) 可換な有限生成 K -多元環で、 $E_G(M)$ は有限生成 $E_G(K)$ -加群である (Evens の結果)。 K が代数的閉体のとき、Quillen は $E_G(K)$ の極大スペクトル V_G が $\bigcup_E V_E$ (E は G の初等可換 p -部分群全体を動く) の G -共役類全体のなす多様体と同型であることを示した。この Quillen の stratification と呼ばれる定理は有限群のモジュラー表現におけるコホモロジー理論の中心的命題の一つである。後に Carlson を始めとする多くの研究者達がこの定理を礎に、 $E_G(M)$ の V_G における台 $V_G(M)$ の性質を調べ、 M の射影性、周期性、直既約性などをこの M の多様体 $V_G(M)$ の言葉に置き換えた。特に Carlson は shifted 部分群 と rank variety の概念を導入し、抽象的なコホモロジーの理論に加群論的な考察方法を与えた。このことは米田の解釈とあいまって、コホモロジー環に対してある種の具体的なイメージを我々に与えてくれる。例えば Avrunin と Scott は $V_G(M)$ についても Quillen の stratification 定理の類似を示したが、その証明は rank variety の概念によっている。

しかし $E_G(M)$ 自身の極大イデアルについてはまだ多くは知られていない。その主な理由は $E_G(M)$ が本質的に非可換であることによる。例えば $E_G(M)$ の極大イデアル M が制限写像 $\text{res}_{G,H} E_G(M) \rightarrow E_H(M)$ の核を含んでいるからといって、 M の上には $E_H(M)$ の極大イデアルがあるかどうかは自明なことではない。また Carlson の shifted 部分群の概念を使おうとしたとき、制限写像がカップ積と可換でないことも支障の一つであった。即ち、shifted 部分群 H に対して、

$$\begin{array}{ccc} E_G(K) & \xrightarrow{\text{res}} & E_H(K) \\ \text{cup} \downarrow & & \downarrow \text{cup} \\ E_G(M) & \xrightarrow{\text{res}} & E_H(M) \end{array}$$

は一般には可換図でないことが知られていた。Carlson は $E_G(M)$ の斉次元の巾零性を cyclic shifted 部分群の言葉で特徴づけたが、ここでは群環の余代数構造 (従ってカップ積) の方を変更して一時的に上図を可換と見なす方法をとった。この特徴づけから Carlson は $E_G(M)$ の Jacobson 根基が巾零斉次イデアルであることを導き、前述の Avrunini と Scott の定理の別証を与えたが、それ以上の積極的な議論は難しい。また Carlson は K が代数的閉体のとき、 $E_G(M)$ の極大イデアルは或る cyclic shifted 部分群への制限写像の核を

含んでいると予想し、特別な場合 (M が G の正規部分群の 1 次表現の誘導加群の場合) にこの予想を証明した。この予想は G が p -群の場合に帰着されるのだが、Carlson の特別なケースでは $E_G(M)$ は $E_H(K)$ 上の行列環の部分環と見なせ、上図が可換になってしまふ。彼の証明はやはりこの可換性に依っているため、一般化は難しい。

著者は直接的な計算により、上の図が次の意味で可換であることを示した。

定理 3.5. H を G の shifted 部分群とすると、 $E_G(K)$ の任意の元 ρ に対して $\text{res}_{G,H} \text{cup}_{G,M}(\rho^p) = \text{cup}_{H,M} \text{res}_{G,H}(\rho^p)$ が成り立つ。

一方 Alperin と Evens は Lyndon-Hochschild-Serre のスペクトル系列を用いて次の結果を得ていた。即ち、 G を p -群、 H をその極大部分群、 β を H に対応する Bockstein 元とすると、 $\text{res}_{G,H} E_G(M) \rightarrow E_H(M)$ の核に含まれる斉次元は 2 乗すると $\beta E_G(M)$ に含まれる。

著者は定理 3.5 により先の図を有限生成 $E_G(K)$ -多元環の可換図とみなし、この Alperin と Evens の結果、そして可換ネーター環上の Artin-Rees の補題を用いて、 $E_G(M)$ の極大イデアルの大きさを $E_G(K)$ との関連において割りながら、Carlson の予想を次のように拡張し、証明を与えた。

定理 A. K は代数的閉体とする。 $\mathcal{M}$ を $E_G(M)$ の極大イデアルとすると、 $\text{res}_{G,U}^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$ となる cyclic shifted 部分群 U と $E_U(M)$ の極大イデアル $\mathcal{N}$ が存在する。

Carlson の予想はこの系として出る。更に定理 A は $E_G(M)$ の極大イデアルに関する種々の議論を、 G が位数 p の巡回群の場合に帰着させる。例えば前出の Avrunin と Scott の定理の新しい別証明を与えることができる (定理 4.6)。

また Carlson は P.I. 環の理論を使って、単純 $E_G(M)$ -加群が K 上有限次元であることを示したが、更に著者はこの結果を次のように精密にした。

定理 6.4. K は代数的閉体とする。 S を単純 $E_G(M)$ -加群とすると、次の性質をもつ G の或る cyclic shifted 部分群 U が存在する。

$V_1, V_2, \dots, V_p$ を $\dim_K V_i = i$ である直既約 KU -加群とし、 $M = \bigoplus_{i=1}^p V_i^{m_i}$ (m_i は重複度) を M の KU -加群としての直既約分解とすると、

$$\dim_K S \leq \begin{cases} \max\{m_1, m_2\} & (p=2) \\ \max\{m_i + m_{p-i}, m_p \mid 1 \leq i \leq (p-1)/2\} & (p>2) \end{cases}$$

が成り立つ。

ここで等号が成り立つ例を作ることは易しい。この定理の証明はやはり定理 A を用いて位数 p の巡回群の場合に帰着させることと、 M の直和分解に対応して $E_G(M)$ を行列環と見たときその Jacobson 根基が各成分の言葉で解釈できる、という Clifford 理論型の次の定理を示すことにより得られた。

定理 5.6. KG -加群として $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ と直和分解されているとき、次が成り立つ。

$$1. \operatorname{rad} \operatorname{Ext}_{KG}^*(-, M) = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{rad} \operatorname{Ext}_{KG}^*(-, M_i).$$

2. $E_G(M)$ を $n \times n$ 型の行列環 $\{(\zeta_{ij}) \mid \zeta_{ij} \in \operatorname{Ext}_{KG}^*(M_j, M_i)\}$ とみたとき、

$$\operatorname{rad} E_G(M) = \{(\zeta_{ij}) \mid \zeta_{ij} \operatorname{Ext}_{KG}^*(M_i, M_j) \subset \operatorname{rad} E_G(M)\}.$$

ここで $\operatorname{rad} \operatorname{Ext}_{KG}^*(-, M)$ は関手 $\operatorname{Ext}_{KG}^*(-, M)$ の極大右イデアル部分関手の共通部分として定義される。著者は $\operatorname{Ext}_{KG}^*(-, M)$ の右イデアル部分関手という概念を導入し、Green が End の場合に使った手法を用いて定理 5.6 を導いた。 M が直既約のときに $E_G(M)/\operatorname{rad} E_G(M)$ について何か強いことが言えればコホモロジーの Clifford 理論を展開できそうだが、それは今後の課題の一つである。尚、定理 5.6 は Carlson による Jacobson 根基の巾零性を用いても証明できるが、著者による方法はその結果を使っていない。特に定理 6.4 の系として、次が示せる (K は代数的閉体でなくてよい)。

定理 B. S を単純 $E_G(M)$ -加群とすると、 $\dim_K S \leq \dim_K M$ である。

定理 A のもう一つの応用として、次の結果をあげることができる。これは Thévenaz により導入された G -関手の極大イデアルに対する不足群を、コホモロジー関手の或る特別な場合について求めたものである。

命題 7.2. G を p -群、 K を代数的閉体、 M を $E_G(M)$ の極大イデアルとする。もし M と $(G, \operatorname{cup}^{-1}(M))$ の不足群がともに G ならば、 (G, M) の不足群も G である。

これも定理 A により位数 p の巡回群のコホモロジー環の議論、即ち自己準同型環の議論に帰着して示されているので、より一般の場合の不足群を決定する一つの足掛りになると思われる。命題の仮定はとても強いが、証明は $E_G(M)$ の中で $\operatorname{End}_{KG}(M)$ と $\operatorname{cup}_{G,M}(E_G(K))$ の生成する部分環がかなり大きいことを暗示している。何らかの方法でこの部分環の大きさを測ることも今後の課題の一つである。

有限群のモジュラー表現におけるコホモロジーの理論において、shifted 部分群は大変有効な概念である。群 G のコホモロジーを調べるためには G の部分群のみならず、shifted 部分群のコホモロジーとの関係を議論する必要がある。そのための道具としては緻密なスペクトル系列は必ずしも使いよいとはいえない。新しい道具の可能性として、第 8 節では‘群の拡大に対するコホモロジーの長い完全列’について論じた。抽象的に存在のみが知られている完全列であるが、具体的に記述することができればスペクトル系列よりも使いやすい道具になると思われる。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 都 筑 俊 郎

副 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 教 授 吉 田 知 行 (熊本大・理)

副 査 助教授 日 比 孝 之

学 位 論 文 題 名

Maximal ideals and Carlson's conjecture
for cohomology rings of modules

(加群のコホモロジー環の極大イデアルとカールソン予想)

庭崎隆氏提出の学位論文は、有限群 G のコホモロジー環の構造に関連したものである。特に、極大イデアルに関する Carlson 予想の肯定的解決、Avrunin-Scott の定理の簡明な別証明、それにコホモロジー環上の既約加群の次元の上限が重要な成果である。これらの結果とその証明は、有限群の表現論、多元環のホモロジー代数、群作用を伴う位相幾何学など、いろいろな方面に応用されるであろう。

群のコホモロジー論は、1950 年代に発展した割と若い分野で、今では有限群とその表現はもちろん、位相幾何学・代数的整数論・代数幾何学等の分野においても基本的な道具となっている。この数年目立つのは、ホモロジー代数と有限群の表現論との活発な交流である。群のコホモロジーが加群の理論と関係していることは、古くから知られているが、今では両者の関係はずっと深いものであることが分かっている。特にコホモロジー環の環論的性質 (極大イデアル、Krull 次元、コホモロジー環上の加群等) と群やその上の加群の性質の関係は、きわめて重要な問題である。

以下では G を有限群、 K を標数 $p > 0$ の体とし、 KG -加群はすべて有限生成とする。 KG -加群 M に対し、 $E_G(M) := \text{Ext}_{KG}^*(M, M) \cong H^*(G, \text{End}_K(M))$ は次数付き K -多元環になる。特に $E_G := E_G(K)$ は「可換」である。 $V_G := \text{Max}(E_G)$ を極大イデアルスペクトルとする。こうすると任意の部分群 $H \leq G$ に対し、 $E_H(M)$ は有限生成 E_H -加群で、 E_G はネーター環である (Evens)。また V_G の連結成分は、 G の極大基本可換 p -部分群の共役類と 1 対 1 に対応している (Quillen)。これより E_G の Krull 次元は、 G の p -rank に等しい。

有限群のコホモロジーの研究を進めて行く上で、主要な困難のひとつは $E_G(M)$ が本質的に非可換なことにある。非可換性のため、 $E_G(M)$ 極大イデアルスペクトルを考えることはできな

いが、 $V_G(M) \subseteq V_G$ として $E_G(M)$ の annihilator を含む E_G の極大イデアルの集合をとれば、議論がうまく行く。こうして、Alperin, Benson, Carlson をはじめとする研究者は、この方面で (Evens, Quillen の定理を含む) 多くの成果を上げ、有限群論や多元環論などに大きなインパクトを与えた。

KG の単数群の部分群 $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \subseteq KG$ が G の shifted 部分群であるとは、 G の階数 n の基本可換 p -部分群 $E = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq G$ と $\alpha_{ij} \in K$ があって、 $u_i = 1 + \sum_j \alpha_{ij}(x_j - 1)$ となることで、特に $m = 1$ のときが cyclic shifted 部分群である。これは Carlson の研究の過程で、浮び上がってきた重要な概念である。これに G の基本可換 p -部分群の役割を果たせようとするのが Carlson のアイデアである。これについて庭崎氏は次の定理を証明した：

定理： $P \in V_G(M)$ とすれば、cyclic shifted 部分群 U と $Q \in V_U(M)$ が存在して、 P は $\text{res}_{G,U}^{-1}(Q)$ を含む。ここで $\text{res} : E_G(M) \rightarrow E_U(M)$ は制限写像である。

この定理は、Carlson 予想 (1985) を大幅に拡張したものである。なお元の Carlson 予想 ($P \supseteq \text{res}_{G,U}^{-1}(0)$) も庭崎氏により 1989 年に証明されている。この定理の直接の系として、 $E_G(M)$ の極大イデアルの余次元の有限性 (Carlson) に関して具体的な上限を与えた。これも本論文における重要な成果である：

系： 既約 $R_G(M)$ -加群の次元は $\dim_K M$ 以下である。

もうひとつの系として、Avrunin-Scott の定理の定理の簡単な別証明が得られる：

系： cyclic shifted 部分群 U に対応する $P \in V_G$ が $V_G(M)$ に含まれるための必要十分条件は、 M が KU 上の自由加群でないことである。

shifted 部分群 U について困ることは、 KU が KG の部分 Hopf 代数でないことである。このため次の図式は一般に可換でない：

$$\begin{array}{ccc} E_G(K) & \xrightarrow{\text{res}} & E_U(K) \\ \text{cup} \downarrow & & \downarrow \text{cup} \\ E_G(M) & \xrightarrow{\text{res}} & E_U(M) \end{array}$$

これに対し庭崎氏は、上の図式が $\{\rho^p \mid \rho \in E_G(K)\}$ では可換なことを見出した。これが Carlson 予想解決の鍵となった重要な結果である。この他にも庭崎氏はこの論文で、有限群の表現論、可換環論、代数幾何学、ホモロジー代数を用いて多くの興味ある結果を導いている。Carlson は、1990 年の京都における国際数学会議の招待講演で、有限群のコホモロジー論の最近の進展について述べ、その中で庭崎氏の定理を最近の重要な成果のひとつとして紹介している。このことも庭崎氏の研究の価値を示すであろう。

以上見たように、本論文は庭崎氏の研究の集大成であり、学位論文として十分な内容を備えていると判断される。