博　士（工学）　五十嵐　　一

学 位 論 文 題 名

Boundary and Finite Element Analyses of Helically Symmetric Electromagnetic Fields

（ヘリカル対称電磁界の境界および有限要素法解析）

学位論文内容の要旨

近年，コンピュータの進歩と数値計算技術の発達により，電磁界問題の3次元解析が可能になりつつある。しかしながら，3次元の計算モデルの作成にはプリプロセッシングソフトウェアを用いても一般に極めて長い時間がかかり，またその計算コストも多大であるのが現状である。計算コストと記憶容量の面から，数値解の精度が保証されるような離散化節点数がとれない場合もある。従って，解析対象に空間対称性を見い出すことができる場合には，それを利用して計算モデルの簡略化を行う必要がある。特に計算モデルが2次元の空間変数で記述できるようなときには，非常に効率の良い解析を実行することができる。

3次元ユークリッド空間においては，3次元問題を2次元化できる空間対称性として，(a)並進対称性，(b)軸対称性，(c)ヘリカル対称性が存在する。これらの対称性のうち並進対称および軸対称については，これまで境界要素法（BEM）や有限要素法（FEM）等による多数の電磁界解析が報告されてきた。しかしながらヘリカル対称系に関しては，汎用の数値解析手法についての報告がほとんどなされていなかった。本論文では，ヘリカル対称電磁界問題のBEMおよびFEM解析について論じている。

第1章ではヘリカル対称電磁界問題の数値解析手法に関する研究を行う背景，電気工学におけるヘリカル系の例，ヘリカル対称電磁界問題の解析手法に関する研究の経緯，研究課題，本研究の位置づけについて述べている。

第2章では一般曲線座標の理論，特に規準・逆規準ベクトル，計算テンソル，共変・反変成分表示，スカラー・ベクトル積，線素・面素・体素，微分演算子について述べている。さらにこれらを基礎として，ヘリカル対称系を記述するツイスト座標，ヘリカル極座標を導入している。

第3章では，BEM解析で必要となる基本解について述べている。まずヘリカル対称ベクトル変形ヘルムホルツ方程式の基本解は，3次元の基本解のソースヘリックスについての積分から統

一的に導出できることを示している。また求めた基本解の無限級数部の収束は計算点がソース点に近づいたときに極めて遅くなることを指摘している。この問題を解決する方法として，基本解を漸近展開して収束性の悪い成分を抜き出し，その成分の無限和を解析的に評価する方法の提案を行い，実際の計算からその有効性を示している。さらにヘリカル対称系の基本解はソース近傍で対数関数的に変化することを明らかにしている。

第 4 章では，ヘリカル対称ポテンシャル問題の BEM および FEM 定式化を行い，いくつかの具体的な問題に本手法を適用している。まず最初にスカラーポテンシャル問題を取り上げ，閉領域問題と開領域問題に対する定式化をツイスト座標を用いて与えている。特に開領域問題に対する FEM では，ラプラス方程式の解析解を用いて無限領域の面積分を疑似円形境界上の線積分に置き換えることによって，これまでの難点を解消している。

上記手法を用いて方形断面ヘリカル柱内のポテンシャル場を解析し，BEM と FEM 解はピッチによらず一致することを示した。また，ヘリカル波数で展開した 2 次摂動解は，ヘリカル波数が小さいときには上記 2 つの数値解と精度良く一致することを示した。さらにヘリカルコイル周辺の静磁界を解析し，提案した手法による解は，解析解と良く一致することを示し，本手法の妥当性を示した。またツイストペア線の周りの電界を解析し，ヘリカル波数の増加によって電界が線近傍のみに局在化して行くことを示した。最後に本手法を用いて，超電導線の交流損失をツイストの効果を考慮して解析し，従来の 2 次元解析ではピッチが小さいときの損失を正しく計算できないことを明らかにした。

本章では続いてベクトルポテンシャルを未知数とする電磁流体力学的（MHD）プラズマのヘリカル対称平衡方程式の BEM・FEM 定式化を行い，円形断面のヘリカル容器内の MHD 平衡を解析した。その結果，非線形平衡方程式の反復解法に Picard 法を用いると平衡パラメータによって反復が数値的に不安定になることが分かった。この不安定な反復計算は，反復演算子の固有値を実効的に小さくする Marder－Weitzner 法によって安定化できることを示した。さらにヘリアック核融合炉内の MHD 平衡を FEM で解析し，その結果が解析解と良く一致することを示した。またトロイダル方向の電流が存在しないという拘束条件を Picard 法に組み入れると，数値的に安定で，しかも Marder－Weitzner 法よりも収束の速い計算が実現できることを明らかにした。

第 5 章ではヘリカル領域の電磁波の定常導波問題についての BEM および FEM 定式化を与え，それらを用いた解析について論じている。

本章ではまずヘルツベクトルを用いてマックスウェルの方程式をからスカラーヘルムホルツ方

程式を導出し，それを基礎としてヘリカル導波路の Lewin の摂動解法を説明している。またスカラーヘルムホルツ方程式に対する BEM および FEM 定式化をツイスト座標上で与えている。BEM 定式化では所謂ハイブリッド BEM を採用し，線形の固有方程式をマトリックス形式で得た。これら数値解法と Lewin の摂動解法で方形断面ツイスト導波管の伝搬特性を解析したところ，3者による結果は良く一致することが分かった。しかしながら，スカラーヘルムホルツ方程式を基礎とした解析では，導波管のピッチが小さな場合，境界条件が不正確になることが分かり，正確な解析にはベクトルヘルムホルツ方程式を解かなければならないことが示された。さらに反復計算を必要としないハイブリッド BEM によっても，解析の計算コストは FEM に較べて高いことが判明した。

本章では続いてベクトルヘルムホルツ方程式の FEM 定式化を磁界の反変・共変両成分について行った。スプリアス解対策としてはペナルティ法を採用した。定式化の結果，反変成分を用いた定式化では電界のエネルギーを表す項が煩雑な形式となり，共変成分を用いた定式化ではペナルティ項が複雑な形式となることが分かり，両定式化を計算機で実現したときの計算量は，ほぼ同等であることが分かった。上記手法を用いて方形断面ツイスト導波管の伝搬特性を解析した結果，反変・共変両定式化による解は一致することが分かり，それらの定式化の等価性が示された。またベクトルヘルムホルツ方程式を摂動法で解いた解は，本手法による解とピッチが大きなときには良く一致するが，ピッチが小さくなると前者に無視できない誤差が生じることが明らかにされた。

6章では，以上の章の結論として，本研究で得られた結果の要点をまとてめている。

学位論文審査の要旨

主査	教授	本間利久
副査	教授	深井一郎
副査	教授	小柴正則
副査	教授	榎戸武揚

本論文は，これまで正確な解析が困難であったヘリカル対称性を有する電磁界のための，境界要素法(BEM)および有限要素法（FEM）を新たに提案し，それによってヘリカル対称スカラー

ポテンシャル問題，ベクトルポテンシャル問題および固有値問題を，２次元問題として精度良く効率的に解析できることを明らかにしたものである。

電気・電子工学においてヘリカル対称性を有する種々の装置・システムが存在するが，それらの電磁界を精度良く効率的に解析できる汎用の数値解析手法がこれまでには無く，その開発が切望されてきた。

まず著者は，一般曲線座標の理論を基礎として，ヘリカル対称ベクトル変形ヘルムホルツ方程式の基本解は，３次元の基本解のソースヘリックスについての積分から統一的に導出できることを示した。また，求めた基本解の無限級数部の収束性は，それを漸近展開して収束性の悪い成分を抜き出し，その成分の無限和を解析的に評価することによって改善できることを示した。著者は上記の結果に基づいて，ヘリカル対称電磁界のための BEM を構築した。

つぎに著者は，ヘリカル対称ポテンシャル問題のための BEM および FEM 定式化を行い，具体的な電磁界問題に本手法を適用した。スカラーポテンシャル問題については，閉領域問題と開領域問題に対する定式化をツイスト座標を用いて与えた。特に，開領域問題に対する FEM では，ラプラス方程式の解析解を用いて無限領域の面積分を疑似円形境界上の線積分に置き換えることによって，これまでの難点を解消した。さらに著者は上記手法を用いて方形断面ヘリカル領域内のポテンシャル場を解析し，BEM と FEM 解が２次摂動解に一致することを示し，その正当性を確認した。また，上記手法をヘリカルコイル周辺の静磁界解析，ツイストペア線の電界解析，超電導線の交流損失解析に適用し，これまで不明であった電磁界におけるヘリカル構造の効果を明らかにした。

これに続いて著者は，ベクトルポテンシャルを未知量とする電磁流体力学的（MHD）プラズマのヘリカル対称平衡方程式の BEM・FEM 定式化を行い，ヘリカル容器内の MHD 平衡を解析した。その結果，非線形平衡方程式の反復解法に，反復演算子の固有値を実効的に小さくする Marder－Weitzner 法およびトロイダル方向の電流が存在しないという拘束条件を課した Picard 法を用いると，数値的に安定で収束の速い計算が実現できることを示した。

さらに著者はヘリカル対称電磁界解析における固有値問題のための BEM および FEM を開発した。まずスカラーヘルムホルツ方程式に対する BEM および FEM 定式化をツイスト座標上で与えた。これらの数値解法と摂動法による方形断面ツイスト導波管の伝搬特性は良く一致することを示し，その正当性を確認した。また，ピッチの小さいツイスト導波管を厳密に解析するには，ベクトルヘルムホルツ方程式を解く必要があることを示した。このため著者は続いてベクトルヘルムホルツ方程式の FEM 定式化を磁界の反変・共変両成分について行った。定式化の結果，反

変成分を用いた定式化と共変成分を用いた定式化の計算量は，ほぼ同等であることを示した。さらに上記手法を用いて方形断面ツイスト導波管の伝搬特性を解析し，反変・共変両定式化による解が良く一致することを示し，それらの定式化の等価性を明らかにした。またベクトルヘルムホルツ方程式を摂動法で解いた解は，本手法による解とピッチが大きなときには良く一致するが，ピッチが小さくなると前者に無視できない誤差が生じることを明らかにした。このことから，ツイスト導波管の解析には提案したFEMが有効であることを示した。

これを要するに，著者はこれまで困難であったヘリカル対称電磁界の解析が，BEMおよびFEMによって効率的に精度良く行えることを明らかにしており，電気・電子工学の進歩に寄与するところ大なるものがある。よって，著者は，博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。