

学 位 論 文 題 名

数理計画法による薄肉平板の非線形応力解析

学位論文内容の要旨

材料物性非線形性または幾何学的非線形性を考慮しなければならない、いわゆる非線形静定構造問題は、その基礎式が持つ数学的煩雑さから、種々の境界条件について解析することが困難であった。材料物性非線形問題としては弾塑性問題や粘弾性問題などが、幾何学的非線形問題としては大たわみ問題や座屈問題などがあるが、前者の弾塑性問題では Tresca 形や von Mises 形の古典的理論を用いた解析が、後者の大たわみ問題では Kármán 理論による解析が多くなされ、そこでは主に増分区間で線形化されたつり合い方程式を解くことによって近似的に解が得られ、特別な場合については解析的に厳密解が得られてきた。しかし、これらの方法によっては、 J_2 理論を拡張した塑性理論による弾塑性問題や、曲げと伸長の連成を考慮した大たわみ問題を扱うことは難しく、新しい解法の開発が期待されてきた。ところが、最近のデジタル・コンピュータの性能向上と例えば有限要素法の登場によって、より複雑な理論による非線形問題の解析が可能となってきた。したがって、非線形問題における基礎式の特徴を生かし、上記の要請を満たす解法として、数理計画法と有限要素法を併用する方法を開発することは意義あることと考えられる。この方法によれば、弾塑性問題においては、等式、不等式を一括した汎関数によって、一般性を持つ理論による解析が、大たわみ問題においては、高次の全ポテンシャルエネルギーの極小化によって、単一荷重に対して連成を考慮した解析が可能である。

本論文は、かかる観点から、数理計画法を導入した有限要素法による非線形構造問題の一般的解法を確立することを目的とし、第一段階として、均質・等方性を有する平板の材料物性非線形または幾何学的非線形構造問題についてそれぞれの解法を開発し、既存の数値解や厳密解などとの比較をもって、一数值解法としての有用性と妥当性を示したものである。全体の構成は全 5 章から成り立っている。

第 1 章は緒論であって、まず、非線形構造問題の解法に関する現況と有効な解法の必要性に触れ、次に数理計画法と有限要素法を併用した本解法の開発の意義について述べている。

第 2 章は、数理計画法の説明であって、この方法の一般的解説と弾塑性問題の解析に用いられ

る有界変数による二次計画法，および大たわみ問題の解析に用いられる非線形計画法の一解法である Davidon-Fletcher-Powell 法のアルゴリズムについて述べている。

第3章は，二次計画法を用いた有限要素法の，材料物性非線形問題である弾塑性平面応力問題への応用である。ここで用いられる理論は偏差応力の第3不変量 J_3' を含む七次の降伏関数を仮定した Prager 理論であり，要素内でひずみと応力が一定である変位関数は一次の一般化座標によって表される。従前山田らが導いた塑性応力-ひずみマトリックスを用いた解法では，von Mises の降伏関数による J_2 理論が使用され，塑性ひずみ速度に関係する乗数（塑性乗数速度）は消去されている。これに対して本解法では，塑性乗数速度は陽な未知変数として扱われることから，この乗数は降伏関数に依存する量となり，降伏関数および塑性ポテンシャルの選定に自由度を持つことになる。この弾塑性問題は，二次の目的関数を制約条件のもとで極小化する最適化問題として解かれるが，その際，塑性乗数速度を制約条件としてではなく非負変数形有界変数として扱うことによって計算時間が短縮される。数値計算例として，両側に半円切欠を有する平板が単軸引張を受ける場合を扱い，まず， J_3' を無視した Prager 理論による塑性領域の広がりとは既存の山田による J_2 理論により求めたそれとを比較して本解法の妥当性を示し，次に，Prager 理論と本解法による J_2 理論とのひずみ，応力分布を比較して，前者の値が後者のそれよりも大であることを明らかにしている。

第4章は，非線形計画法を用いた有限要素法の，幾何学的非線形問題である大たわみ連成問題への応用である。ここでは大たわみ問題を四次の目的関数を極小化する最適化問題としてとらえ，変位間の連成による面内変位の面外変位（たわみ）に及ぼす影響を明らかにしている。まず，扇形板要素について面外・面内両変位の非線形項を考慮した理論を提唱し，次に，片持はりのエラストティカ問題の結果を厳密解と比較して本解法の成立範囲を検証し，また，面外変位の非線形項のみ考慮した理論によって既存の近似解があるく形板と円輪板を扱い，結果を比較している。最後に，面外・面内両変位の非線形項を考慮した理論によって円輪板の大たわみ連成問題を解析し，板厚程度の面外変位が生ずる場合でも，両変位の連成効果は大であることを明らかにしている。

最後の第5章は結論であって，本解法が非線形構造問題に対する有力な数値解法であることを述べている。

なお，付録として種々の境界条件と寸法比を有する円輪板の変位と応力についての設計資料を示している。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 岸 田 路 也

副 査 教 授 石 川 博 将

副 査 教 授 山 田 元

副 査 教 授 芳 村 仁

近代の化学工業は数々の新しい物質を生み出して来たが、特に非線形効果を示す工業材料の出現は、構造工学の分野に非線形理論に対するさし迫った要請をもたらした。それまでは、たいいての工学現象が線形理論によって十分よく表されてきた。したがって、当時の新しい要請であった非線形理論の数理解決に当たっては、それに対応する新しい解法が要求された。しかし、基礎方程式の持つ数学的煩雑さゆえに、種々の条件下における解の誘導は困難であり、特別な場合を除いては、主に、連続現象を微小区間に分割し、区間内で線形化した方程式を解く、増分型式の近似解法がとられてきた。したがって、工学的見地からも、容易な一般近似解法の提案が望まれてきた。

本論文は、かかる観点から、非線形構造問題を最適化問題としてとらえ、その解決に数理計画法の適用を提案し、薄肉平板の材料物性的非線形問題および幾何学的非線形問題について各数値解析法の定式化を行い、応用結果の検討によって、その妥当性と有用性を示したものである。本解法の強調すべき特徴は、目的関数を有限要素法によって算定したことにある。本論文の構成は全5章から成り立っている。

第1章の緒論では、非線形構造問題の解法に関する現況と有効な解法の開発の必要性に触れ、本研究の目的と本解法の開発の意義について述べている。

第2章では、数理計画法の一般概念と、材料物性的非線形問題としての弾塑性問題の解析に用いられる有界変数による二次計画法、および幾何学的非線形問題としての連成大たわみ問題の解析に用いられる非線形計画法の一解法である Davidon-Fletcher-Powell 法について説明している。

第3章では、有限要素法を導入した二次計画法を弾塑性問題に用い、二次の目的関数を制約条件下で極小化する最適化問題として定式化を行った。本方法によれば、ひずみ増分理論における塑性乗数速度が降伏関数に依存する陽な未知変数として扱えるため、降伏関数の選定が自由となり、従来の変位速度のみを未知数とする解法と比較して、一般の流れ理論による解析が可能とな

ることを示した。両側に半円切欠きを有する帯板のひずみ集中問題を例とし、まず、従来のミーゼスの降伏関数を用いた場合、本解と従来の塑性応力～ひずみマトリックス法による解とが良く一致することを確認し、次に、偏差応力の第3不変量を考慮したプラガーの降伏関数を用いて解を求め、塑性変形領域の拡大に伴い、従来の解との相違が大きくなることを示した。

第4章では、有限要素法を導入した非線形計画法を連成大たわみ問題に用い、四次の目的関数を極小化する最適化問題として定式化を行った。本方法によれば、ひずみを面外および面内両変位の高次式で表し、両変位の連成効果を考慮した連成大たわみ理論による解が、増分法によらず、比較的容易に得られることを示した。本方法を、その特殊な場合であってしかも厳密解あるいは近似解のある、エラスチカ問題と非連成大たわみ問題に適用し、その適用範囲と解の信頼性について検証した。さらに、面外荷重を受ける円輪板の連成大たわみ問題を異なった外周支持条件について扱い、面外変位が板厚程度の変形において、面外変位のみに非線形項を考慮した場合および面外・面内両変位に非線形項を考慮した場合の両結果を比較検討し、貴重な資料を示した。

第5章の結論では、以上の諸検討を総括し、有限要素法を導入した数値計画法による本解法が、非線形構造問題の有力な一解法であることを述べている。

これを要するに、本論文で提案された解法は、各非線形構造問題の有力な一近似解法であるとともに、両非線形性を同時に考慮した場合の解法へと直ちに拡張可能なものであって、その工学的有効性は高く、とくに材料力学に貢献するところ大である。よって、著者は博士（工学）の学位を授与される資格あるものと認める。