博士（理学）　高口　真

学位論文題名

On the joint spectrum and joint numerical range of Hilbert space operators

（ヒルベルト空間作用素の合同スペクトルと合同数域について）

学位論文内容の要旨

単位元をもつ可換バナハ代数の研究に、アレンズとカルデロンが初めて合同スペクトルの概念を導入して多変数関数論からのアプローチを試みたのは1955年のことである。以来、可換バナハ代数における合同スペクトルの研究とともに、バナハ空間上またはヒルベルト空間上の有界線形作用素の合同スペクトルの研究がなされて来た。

$A=(A_1,\dots,A_n)$ をヒルベルト空間H上の可換な作用素族とすると、H上の有界線形作用素の全体B（H）は非可換なバナハ代数となるから、Aのアレンズ・カルデロン型の合同スペクトルを定義するためには A を含むB（H）の可換な閉部分代数βの中で考える。即ち、Aのβに関する合同スペクトル $\sigma_\beta(A)$ は $\{A_1-z_1,\dots,A_n-z_n\}$ のβの中でつくるイデアルがβと一致しないような C^n の要素 $z=(z_1,\dots,z_n)$の全体として定義する。したがって$\sigma_\beta(A)$はβのとり方に依存する。βとして、Aの重交換子A''にとることが一般的で、このときの $\sigma_{A''}(A)$ を重交換子スペクトルという。$\sigma_{A''}(A)$ の欠陥はAが変わるとAとともにA''が動くというところにある。そのため、可換バナハ代数に於ける合同スペクトルについて成り立つ“スペクトル写像定理”などの重要な性質を$\sigma_{A''}(A)$ は持たない。この欠点を補うものとしてアレンズ・カルデロン型とは異なるテーラーの合同スペクトル $\sigma_T(A)$ がある。　これは、いま、E（A－z，H）をA－z＝$(A_1-z_1,\dots,A_n-z_n)$に対応するH上のコスズル複体とするとき、E（A－z，H）が完全でないような$z\in C^n$の全体として定義される。$\sigma_{A''}(A)$、$\sigma_T(A)$ は次の重要なスペクトルを内部に含む。それは合同近似固有値と合同近似随

伴固有値である。その定義は、$(A_k - z_k)x_j \to 0$ $(j\to\infty)$, $(k=1,...,n)$であるような単位ベクトル列$\{x_j\}$が存在する$z=(z_1,...,z_n)$をAの合同近似固有値といい、同様に、$(A_k^* - \overline{z_k})x_j \to 0$ $(j\to\infty)$, $(k=1,...,n)$ である $z\in C^n$を合同近似随伴固有値という。

定理 1：$n=2$のときには、テーラー合同スペクトル $\sigma_T(A)$ の境界部分は合同近似固有値かまたは合同近似随伴固有値から成る。

$n\geqq 3$のときは、上の定理は成り立たないことが、その後クルトにより証明されている。

単一の有界線形作用素のスペクトルの研究には数域の研究が関連してくるが、作用素族の場合にも合同スペクトルに関連して合同数域が研究の対象になる。いま、$A=(A_1,...,A_n)$ を必ずしも可換でない作用素族とする。 Aの合同数域W(A)は $W(A)=\{((A_1x,x),...,(A_nx,x))\in C^n: x\in H, \|x\|=1\}$ により定義されるが、単一の作用素の場合と異なって一般にはC^nの中の凸集合とはならない。しかし、W(A)に含まれる二つの合同固有値を結ぶ線分はW(A)に含まれ、$\overline{W(A)}$に含まれる二つの合同近似固有値を結ぶ線分は$\overline{W(A)}$に含まれる。

定理 2：W(A)の点$z=(z_1,...,z_n)$がW(A)の錐点になっていれば、zはAの合同固有値である。$\overline{W(A)}$の点zが$\overline{W(A)}$の錐点ならば、zはAの合同近似固有値である。さらに、A_k $(k=1,...,n)$ がすべて亜正規作用素 $(A_k^*A_k \geqq A_kA_k^*)$ でかつ $A_j^*A_k=A_kA_j^*(j\neq k)$ のときは、W(A)の凸包の端点はすべてAの合同固有値であり、$\overline{W(A)}$の凸包の端点はすべて合同近似固有値である。

$A=(A_1,...,A_n)$ がH上の可換な正規作用素族のときには、よく知られた正規作用素のスペクトル分解定理から、或測度空間$(\Omega;\mu)$と、$L^2(\Omega;\mu)$からHへのユニタリ作用素U、$L^\infty(\Omega;\mu)$のn個の要素$\phi=(\phi_1,...,\phi_n)$があって、$U^{-1}A_kUf=\phi_kf$ $(f\in L^2(\Omega;\mu))$とできる。したがって、作用素族Aの性質は関数の族$\phi=(\phi_1,...,\phi_n)$の性質に帰着され、そのことから、Aが可換な正規作用素族のときは、$\sigma_{A''}(A)$、$\sigma_T(A)$はAの合同近似固有値の全体に等しいこと、W(A)が凸集合になること、Aの合同スペクトルの凸包が$\overline{W(A)}$に等しいことなどが容易にわかる。

そこで、単一の作用素の場合と同じように、何らかの意味で可換な正規作用素族のような性質を持った種々な作用素族のクラスを考える。先ず、可換な作用素族$A=(A_1,...,A_n)$についての定義を与える。もし、$A_j^*A_k=A_kA_j^*(j\neq k)$ならば、Aは重可

換であるという。　$\|A\| = \sup\{ [\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2]^{\frac{1}{2}} : \|x\|=1 \}$、　$r(A) = \sup\{ |z| : z \in W(A)\}$ と置く。もし、C^nの全ての点 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ に対して $\|A - z\| = r(A - z)$が成り立つとき、Aは合同トランスロイドであるという。もし、C^nの全ての点 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ に対して、$\inf\{ [\sum_{k=1}^{n} \|(A_k - z_k)x\|^2]^{\frac{1}{2}} : \|x\| = 1\} \geqq d(z, \sigma_T(A))$であるならば、Aは合同$(G_1)$に属するという。もし、$\{A_1,\ldots,A_n\}$の一次結合から成る作用素のn個の族が全て合同$(G_1)$に属するとき、Aは完全合同$(G_1)$に属するという。もし、$\sigma_T(A)$の凸包が$\overline{W(A)}$の凸包に等しいならば、Aは合同コンベクソイドであるという。

定理 3：重可換な亜正規作用素族$A=(A_1,\ldots,A_n)$に対し、もし、C^nの点 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$が作用素族 $A^*A=(A_1^*A_1,\ldots,A_n^*A_n)$の合同スペクトルに属するならば、$|z_k|^2=\lambda_k$ $(k=1,\ldots,n)$であるような $z=(z_1,\ldots,z_n)$でAの合同スペクトル$\sigma_T(A)$に属するものが存在する。$AA^*=(A_1A_1^*,\ldots,A_nA_n^*)$についても同様である。

系 1：重可換な亜正規作用素族は合同トランスロイドである。

系 2：$A=(A_1,\ldots,A_n)$が重可換な亜正規作用素族ならば、C^nの全ての点 $z=(z_1,\ldots,z_n)$に対し、$\inf\{ [\sum_{k=1}^{n} \|(A_k - z_k)^* x\|^2]^{\frac{1}{2}} : \|x\|=1\} = d(z, \sigma_T(A))$が成り立つ。

可換な作用素族Aに合同スペクトル$\sigma_T(A)$を対応させる対応は、一般にはハウスドルフの距離の意味で連続でない。この問題に対して、次のことが系2から導かれる。

系 3：Aに$\sigma_T(A)$を対応させる上記の対応は、Aを重可換な亜正規作用素族に制限すると連続である。

命題：合同トランスロイド作用素族Aの閉数域$\overline{W(A)}$の凸包の端点は、全て合同近似固有値である。

n個から成る作用素族を上で定義した種々の種類にクラス別けしたときの包含関係を図示すると、次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\boxed{\text{可換な正規作用素}} \arrow[r] \arrow[rd] & \boxed{\text{重可換な亜正規}} \arrow[r] & \boxed{\text{合同トランスロイド}} \arrow[r] & \boxed{\text{合同コンベクソイド}} \\
& \boxed{\text{完全合同}(G_1)} \arrow[rru] & &
\end{tikzcd}$$

Hが無限次元のときは、ノルム・トポロジーに関して、可換な正規作用素族のクラスは完全合同(G_1)の中で至るところ非稠密である。後になって、ウローベルは、合同コンベクソイド作用素族Aの閉数域$\overline{W(A)}$が凸集合なることを証明している。

学位論文審査の要旨

主査　教授　安藤　毅
副査　教授　岸本晶孝
副査　教授　岡部靖憲

学位論文題名

On the joint spectrum and joint numerical range of Hilbert space operators

（ヒルベルト空間作用素の合同スペクトルと合同数域について）

1個の線形作用素に対するスペクトルの概念は，Arens と Calderon により n 個の可換な線形作用素の族 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$ に対する合同スペクトルの概念に拡張されたが，その定義は $\mathbf{A}$ を含む可換な部分代数の取り方に依存する．普通は $\mathbf{A}$ の重交換子代数 $\mathbf{A}''$ をとり，この合同スペクトル（の集合）を $\sigma''(\mathbf{A})$ と書く．

$\mathbf{A}''$ は $\mathbf{A}$ と共に変わるため，n 変数の n 個の解析関数を，族 $\mathbf{A}$ に施す写像に関して，いわゆるスペクトル写像定理が成り立たない場合が起こる．

一方 Taylor は，1個の作用素のスペクトルを別の観点から考察し，n 個の可換な作用素の族に対しても，それに関連して導入される Koszul 複体を使って，新しい合同スペクトルの概念を導入した．これは Taylor の合同スペクトルと呼ばれ，$\sigma_T(\mathbf{A})$ と書かれる．

$\sigma''(\mathbf{A})$ も $\sigma_T(\mathbf{A})$ もともに，各 A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ の写像としての自然な性質のみに依存する合同近似固有値及び合同近似随伴固有値のすべてをその内部に含む．ここで $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ が $\mathbf{A}$ の合同近似固有値であるとは，$\|A_j x_k - \lambda_j x_k\| \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ となるような単位ベクトルの列 $\{x_k\}$ が存在することである．また，Λ が合同近似随伴固有値であるとは，$(\overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_n})$ が族 $(A_1{}^*, \cdots, A_n{}^*)$ の合同近似固有値のときである．

申請者は，特に $n=2$ のときには，Taylor の合同スペクトルのどの境界点も合同近似固有値かまたは合同近似随伴固有値となることを証明した．この事実は n が 3 以上の場合は成り立たないことも後に判明した．

合同近似固有値や合同近似随伴固有値は，A_j $(j=1,2,\cdots,n)$ の相互の可換性には依存しないで定義されるが，この他にも可換性とは関連ない対象として $\mathbf{A}$ の合同数域 $W(\mathbf{A})$ がある．すなわち

$$W(\mathbf{A})=\Big\{\big((A_1x,x),\cdots,(A_nx,x)\big)\ \Big|\ \|x\|=1\Big\}.$$

1 個の作用素のときは，数域が複素平面の凸集合になることは古典的な結果である．n 個の作用素の族のときは，合同数域は合同近似固有値及び合同近似随伴固有値をすべて含むが，一般には凸集合とはならない．

申請者は，数域の特別な位置にある点に注目して，必ずしも可換ではない場合でも，$W(\mathbf{A})$ の閉包の錐点は必然的に合同近似固有値となることを見いだした．また，各 A_j $(j=1,2,\cdots,n)$ が亜正規作用素で，$A_j{}^*A_k=A_kA_j{}^*$ $(j\neq k)$ をみたすときは，$W(\mathbf{A})$ の閉包の端点もすべて合同近似固有値になることを示した．

さらに申請者は，$\mathbf{A}$ が重可換な亜正規作用素からなるときは，$\sigma''(\mathbf{A})$ と $\sigma_T(\mathbf{A})$ は一致し，族 $(A_1{}^*A_1,\cdots,A_n{}^*A_n)$ の合同スペクトルのどの点も，A 自身のある合同スペクトルの点の絶対値の 2 乗となっていることをも示した．この結果から，$\mathbb{C}^n$ の点 $\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ からの $\sigma_T(\mathbf{A})$ への距離が次の公式で求められる．

$$\operatorname{dis}\big(\Lambda,\sigma_T(\mathbf{A})\big)=\inf\bigg\{\Big\{\sum_{j=1}^{n}\|A_jx-\lambda_jx\|^2\Big\}^{1/2}\ \bigg|\ \|x\|=1\bigg\}$$

以上のように，申請者の研究は，n 個の作用素の族のスペクトルの性質に関して重要な新しい知見をもたらすもので，審査員一同は申請者が博士（理学）の学位を得るのに十分な資格あるものと認めた．