

学 位 論 文 題 名

A dimension formula for the cohomology rings
of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups

(二面体群をシロー 2 群とする有限群の
コホモロジー環の次元公式)

学位論文内容の要旨

有限群のモジュラー表現論では、群環上の加群が相対的射影被覆 (relatively projective cover) をもつことが R. Knörr により知られている。しかしこの事実が興味深いものであるにもかかわらず、実際にモジュラー表現論において有効に用いられた例はほとんどなかった。この論文では、コホモロジー群の次元を考えることに相対的射影被覆の双対的な概念である相対的入射包絡 (relatively injective hull) を効果的に用いて、以下に示すような結果を得た。

以下、ここでは G を位数 2^n ($n \geq 3$) の二面体群 D をシロー 2 部分群とする有限群、 k を標数 2 の体とし、コホモロジー環 $H^*(G, k) = \sum_{i \geq 0} H^i(G, k) = \sum_{i \geq 0} \text{Ext}_{kG}^i(k, k)$ を考える。この論文では、モジュラー表現論やコホモロジーの理論でよく知られている基本的な方法だけを使い代数的な手法で次元公式を得ている。つまり、群の構造や kG -加群の構造などに関する詳しい情報は必要なく、またスペクトル系列の方法も使っていない。

二面体群をシロー 2 部分群とする有限群の構造は以前から R. Brauer 等により詳しく調べられている。しかしここではそのような詳細な結果は必要がなく、つぎの簡単な事実を出発点とする。

出発点となる事実: G を位数 2^n ($n \geq 3$) の二面体群 D をシロー 2 部分群とする有限群とし、

$$D := \langle x, y, z \mid z = xy, x^2 = y^2 = z^{2^{n-1}} = 1 \rangle$$

と表しておく。この時 G はつぎの三つの場合のいずれかにあてはまる。

- Case(1) $x \in_G \langle z \rangle, y \in_G \langle z \rangle,$
 Case(2) $x \in_G \langle z \rangle, y \notin_G \langle z \rangle$ or $x \notin_G \langle z \rangle, y \in_G \langle z \rangle,$
 Case(3) $x \notin_G \langle z \rangle, y \notin_G \langle z \rangle.$

例えば、このような群のコホモロジー環は個々にいくつか調べられている。

Case(1) の例: G を $SL(3, 2) (\simeq PSL(2, 7))$ または 7 次の交代群 A_7 とする。この時 $H^*(G, k) \simeq k[\varepsilon, \theta_1, \theta_2]/(\theta_1 \theta_2)$, 但し $\deg \varepsilon = 2, \deg \theta_1 = \deg \theta_2 = 3$, となり、その次元公式はつぎのようになる。

$$\dim_k H^{i+3}(G, k) = \dim_k H^i(G, k) + 1.$$

Case(2) の例: G を 4 次の対称群 S_4 とする. この時 $H^*(G, k) \simeq k[\chi, \epsilon, \theta]/(\chi\theta)$, 但し $\deg \chi = 1, \deg \epsilon = 2, \deg \theta = 3$, となり, その次元公式はつぎようになる.

$$\dim_k H^{i+3}(G, k) = \dim_k H^i(G, k) + 2.$$

Case(3) の例: G を位数 $2n$ の二面体群 D_{2n} とする. この時 $H^*(G, k) \simeq H^*(D, k) \simeq k[\chi_1, \chi_2, \epsilon]/(\chi_1\chi_2)$, 但し $\deg \chi_1 = \deg \chi_2 = 1, \deg \epsilon = 2$, となり, その次元公式はつぎようになる.

$$\dim_k H^{i+3}(G, k) = \dim_k H^i(G, k) + 3.$$

この論文では, 群を個別に扱うのではなく各々の場合の群を一括して扱い, 各々の場合の全ての群で先の例の結果が成立することを示すのが目的である. コホモロジー環の次元公式はつぎのように与えられる.

主定理: G を位数 2^n ($n \geq 3$) の二面体群 D をシロー 2 部分群とする有限群, k を標数 2 の体とする. この時コホモロジー環 $H^*(G, k)$ の次元公式はつぎのように与えられる.

$$\dim_k H^0(G, k) = 1,$$

$$\dim_k H^1(G, k) = j - 1 \quad \text{ケース (j) の場合,}$$

$$\dim_k H^2(G, k) = j \quad \text{ケース (j) の場合,}$$

$$\dim_k H^{i+3}(G, k) = \dim_k H^i(G, k) + j \quad \text{ケース (j) の場合.}$$

但し, i は任意の 0 以上の整数, j は 1, 2, 3 とする.

以下, 主定理の証明を簡単に示す. その証明では, 相対的入射包絡と '加群の variety' の理論が重要となるので, まずそれらについて説明する. 相対的入射包絡とはつぎの様に定義される.

定義: ここで $\mathcal{H}$ を G の部分群のある集合, M を kG -加群としよう. この時つぎの条件をみたす kG -加群の単完全列 $(*) 0 \rightarrow M \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow 0$ が同型を除いて一意に存在する.

(i) V は $\mathcal{H}$ -射影的,

(ii) $(*)$ の $\mathcal{H}$ の各元への制限は分裂する,

(iii) U は $\mathcal{H}$ -射影的な直和因子をもたない.

このような単完全列を M の $\mathcal{H}$ -入射包絡と呼ぶ.

つぎに '加群の variety' の理論をこの場合にどのようにして使うのかを示す. 先ず, '加群の variety' の理論を使って, 周期的な kG -加群 X に対して, $X \otimes L_\gamma$ が射影的となるようなある $\gamma \in H^*(G, k)$ が存在することが示されている. 但し, ここで L_γ は γ に対応するコサイクル $\tilde{\gamma}: \Omega^r(k) \rightarrow k$ の核を表す. 故に, 完全列 $0 \rightarrow X \otimes L_\gamma \rightarrow X \otimes \Omega^r(k) \xrightarrow{1 \otimes \tilde{\gamma}} X \rightarrow 0$ は分裂する. すなわち, $\Omega^r(X) \simeq X$ となり, このことを γ は X の周期性を生成するという. この時つぎの定理が成り立つ.

定理 1: kG -加群の短完全列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} X \rightarrow N \rightarrow 0$ を考える. ここで, M, N は射影的な因子をもたないとし, X は周期加群としその周期性は $\gamma \in H^*(G, k)$ で生成されているとする. いま, S を任意の既約 kG -加群としよう. もし f から自然に誘導される $f^*: \text{Ext}_{kG}^i(X, S) \rightarrow \text{Ext}_{kG}^i(M, S)$ が $0 \leq i \leq r-1$ に対して零写像ならば, f^* は任意の $i \geq 0$ に対して零写像となっている. 特に, 任意の $i \geq 0$ に対し,

$$\dim_k \text{Ext}_{kG}^{i+1}(N, S) = \dim_k \text{Ext}_{kG}^i(M, S) + \dim_k \text{Ext}_{kG}^{i+1}(X, S)$$

となっている.

概ね、この論文ではつぎのような方法でコホモロジー環の次元公式を求めている。

- (1) 自明な加群の相対的入射包絡でいい性質を持つものを見つける、
- (2) (1) の相対的入射包絡を用い、いくつかの i に対して $\dim_k H^i(G, k)$ の値を直接決める、
- (3) (1) の相対的入射包絡に '定理 1' を応用して、全ての $\dim_k H^i(G, k)$ を決める。

以降、主定理の証明の手順を述べる。

Step 1(二面体群の場合): 二面体群のコホモロジー環 $H^*(D, k)$ に関しては、自明な kD -加群 k_D の $\{\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle\}$ -入射包絡, $0 \rightarrow k_D \rightarrow k_{\langle x \rangle} \uparrow^D \oplus k_{\langle y \rangle} \uparrow^D \oplus k_{\langle z \rangle} \uparrow^D \rightarrow \Omega^2(k_D) \rightarrow 0$, に定理 1 を応用し、任意の $i \geq 0$ に対し

$$\dim_k H^{i+3}(D, k) = \dim_k H^i(D, k) + 3$$

となることがわかる。ここでの議論は、後に G の場合と D の場合とを制限や誘導などをつかい比較しながらすすめるので必要となる。

Step 2(Case(3) の場合): この場合 $\{\langle z \rangle\}$ -入射包絡を考える。自明な kD -加群 k_D の $\{\langle z \rangle\}$ -入射包絡が $0 \rightarrow k_D \rightarrow k_{\langle z \rangle} \uparrow^D \rightarrow k_D \rightarrow 0$ となることから、自明な kG -加群 k の $\{\langle z \rangle\}$ -入射包絡が

$$0 \rightarrow k \rightarrow \text{Sc}(\langle z \rangle) \rightarrow k \rightarrow 0$$

となることがわかる。但し、ここで $\text{Sc}(\langle z \rangle)$ は $k_{\langle z \rangle} \uparrow^G$ の直既約因子でその socle に自明な加群 k を含む加群である。このような加群は一意的に決り Scott 加群と呼ばれている。自明な kG -加群 k の $\{\langle z \rangle\}$ -入射包絡の形から G が正規な 2 補部分群を持つことがわかり、 G のコホモロジー環 $H^*(G, k)$ はそのシロー部分群である二面体群のコホモロジー環 $H^*(D, k)$ と同型になることがわかり、二面体群の場合と同じ次元公式を持つことがわかる。また、ケース (3) の場合群 G は正規な 2 補部分群を持つことが群の元に関する融合の理論を用いて既に知られているが、ここでの証明はこの事実に関する別証明となっている。

Step 3(Case(1), Case(2) の場合): Case(1) と Case(2) は平行して議論をすすめる。ここでは自明な kG 加群の $\{\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle\}$ -相対的入射包絡が大切な役割を果たしている。この相対的入射包絡は Step 1 で用いた自明な kD 加群の $\{\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle\}$ -相対的入射包絡から Green 対応などモジュラー表現論でよく知られている結果を用いて

$$0 \rightarrow k \rightarrow S \rightarrow \Omega^2(k) \rightarrow 0$$

となることが導かれる。但し、ここで S はいくつかの Scott 加群の直和でつぎのようにあたえられる。

$$S := \begin{cases} \text{Sc}(\langle z \rangle) & \text{Case(1) の場合} \\ \text{Sc}(\langle y \rangle) \oplus \text{Sc}(\langle z \rangle) \text{ or } \text{Sc}(\langle x \rangle) \oplus \text{Sc}(\langle z \rangle) & \text{Case(2) の場合.} \end{cases}$$

どちらの場合においても S は周期加群で、その周期性を生成する元を $H^2(G, k)$ の中で具体的に見つけてくる。そして、自明な kG 加群の $\{\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle\}$ -相対的入射包絡の射影被覆を考えることで $i = 0, 1, 2$ に対して $\dim_k H^i(G, k)$ の値を直接決め、その後定理 1 を用いて次元公式を得ている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 都 筑 俊 郎

副 査 教 授 諏 訪 立 雄

副 査 教 授 吉 田 知 行 (熊本大・理)

副 査 助 教 授 日 比 孝 之

学 位 論 文 題 名

A dimension formula for the cohomology rings
of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups

(二面体群をシロー 2 群とする有限群のコホモロジー環の次元公式)

浅井恒信氏提出の学位論文は、そのシロー 2-部分群が二面体群であるような有限群 G のコホモロジー環 $H^*(G, k)$ に関するものである。特に k が標数 2 の体の場合に、すべての次数のコホモロジー群の次元を純代数的な方法で決定したことは、大きな成果である。これらの結果とその証明は、有限群の表現論、群作用を伴う位相幾何学など、いろいろな方面に応用されるであろう。

群のコホモロジー論は、1950 年代に発展した割と若い分野で、今では有限群とその表現はもちろん、位相幾何学・代数的整数論・代数幾何学等の分野においても基本的な道具となっている。特に浅井氏が専門とする有限群のモジュラー表現論では、ここ数年位相幾何学やホモロジー代数、組み合わせ論の方法が導入され、内容が一新されつつある。当然、群のコホモロジー環の構造に強い関心が向けられ、その構造について活発な研究がなされている。しかしながら、群のコホモロジー環の構造を決めるのは、極めて難しい。標準的な方法では、単なる二面体群の場合でさえ、人手ではほとんど不可能なほど膨大な計算を必要とする。

この困難を回避するために、位相幾何学的方法が良く使われる。実際そのような方法で、二面体群をシロー 2-部分群として持つ有限群のコホモロジー環の構造を決定することも可能であろう。しかしこの方法では、代数的に定義される量を計算するのに、代数以外の分野の助けを借りることになり、大きな不満が残っていた。

これに対して、浅井氏の方法は純粹に代数的なものである。有限群のモジュラー表現論とコホモロジー論で開発された最新の道具をフルに使っている。これによって、有限群のコホモロジー環を計算する問題の見通しが良くなった。浅井氏が行ったのは、2 面体群 (それに一般 4 元

数群)をシロー群に持つ場合だけだが、他の場合についても、浅井氏の取った方法は十分に通用すると思われる。

浅井氏の得た成果を述べるために、以下では k は標数 2 の体、 G は有限群で、その 2-シロー群 D は 2 面体群とする。この G の構造について、 $(G:G')_2 = 2^{j-1}$ に応じて三通りの可能性 ($j = 1, 2, 3$) がある。このような群 (特に単純群) は分類されているのだが、このことを使ったとしても、当面の問題の役には立たない。

$$H^*(D, k) \cong k[\chi_1, \chi_2, \epsilon]/(\chi_1\chi_2), \deg\chi = \deg\chi_2 = 1, \deg\epsilon = 2$$

という事は、例えば群拡大に関するスペクトル系列の計算から得られる。特に、

$$\dim_k H^{i+3}(D, k) = \dim_k H^i(D, k) + 3.$$

である。また、 $H^*(G, k)$ は、制限写像によって、 $H^*(D, k)$ の部分環に同型である。したがって、 $H^*(D, k)$ の部分環として $H^*(G, k)$ を記述する事を期待できる。実際浅井氏は、学位論文でこれを証明した。

主定理: $d_i := \dim H^i(D, k)$ と置く。 $|D| \geq 8$ なら、

$$d_{i+3} = d_i + j \quad (i \geq 0), \quad d_0 = 1, d_1 = j - 1, d_2 = j.$$

(ここで 場合 (1), (2), (3) に応じて、 $j = 1, 2, 3$)。特にポアンカレ級数について、

$$\xi_k(t) := \sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i = \frac{1 + (j-2)t + t^2}{(1-t)(1-t^3)}.$$

この定理の証明において使われたものとして、特に注目すべきものは、Scott 加群、相対入射加群、Heller 作用素といったモジュラー表現論で標準的となりつつある概念である。証明の詳細にこれ以上立ち入る事はできないが、極めて洗練された方法が用いられており、今後のこの方面の研究に標準的な技法となるであろう。

なお、浅井氏は、山口大学の佐々木洋城氏との共同研究で、学位論文と同じ方法によって、コホモロジー環の次元のみならず、完全な環構造を決定している。次の重要な定理は、学位論文の補足にある。

定理: $|D| \geq 8$ なら、

$$H^*(G, k) \cong k[\epsilon, \chi, \theta]/(\chi\theta).$$

ここで、 $\deg\epsilon = 2$ であり、場合 (1), (2), (3) に応じて、 $(\deg\chi, \deg\theta) = (3, 3), (1, 3), (1, 1)$ である。

以上見たように、本論文は学位論文として十分な内容を備えていると判断される。