

学 位 論 文 題 名

Exchange relations for the q -vertex operators of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

(量子カッツ・ムーディー代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ における
 q 変形頂点演算子の交換関係)

学位論文内容の要旨

▲序論

“ q 変形カッツ・ムーディー代数”（ q KM代数）と呼ばれる大きな対称性を持った2次元量子場の理論（ q WZNWモデル）は、超弦理論、スピン系への応用や、Yang-Baxter 方程式との関係等により、物理的にも数学的にも興味深い理論である。この q KM代数は、角運動量の代数のある意味で拡張になっており、相違点は生成消滅演算子が無限個ある事と q 変形されている事である。角運動量理論においては、既約表現であるテンソル演算子が基本的な役割を演じている。 q KM代数におけるテンソル演算子は q 頂点演算子と呼ばれ、角運動量の場合同様重要である。

そこで本論文では、基本的な $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ という q KM代数において、 q 頂点演算子の性質を具体的により詳しく考察し、 q 頂点演算子の具体的な計算に便利な、あらわな定義を与え、合成則及び任意の行列要素を計算する一般的手法及びその交換関係を導出した。以下でそれを述べる。

▲本論

【1】 先ず q 頂点演算子の定義とその行列要素について述べる

定義： q WZNWモデルにおけるスピン j の q 頂点演算子 Ψ_j は、 q KM代数の随伴作用 ad に対する既約表現として次の様に定義される。

$$ad(J)\Psi_j = \rho_j(J)\Psi_j, \quad \text{for all } J \in U_q(\mathfrak{sl}_2).$$

ここで ρ_j は、スピン j のレベル零表現 である。

角運動量の理論において、テンソル演算子の行列要素は、ウイグナー・エッカルト

の定理により、零でない行列要素をどれか一つ知れば、他の磁気量子数に対する行列要素は全てクレブシュ・ゴルダン係数を用いて与えられていた。q WZNWモデルにおいても、昇降演算子を用いて表現の中を自由に移動できるので状況は同じである。

命題： 重み j のヴァーマ・モジュール V_j の元 $|j, v\rangle$ に対し、 q 頂点演算子 $\Psi_{j_2, m_2}(z) : V_{j_1} \rightarrow V_{j_3}$ の任意の行列要素

$$\langle j_3, u | \Psi_{j_2, m_2}(z) | j_1, v \rangle,$$

は、零でない行列要素をどれか一つ知れば、他の行列要素は全て、その定義のみから計算できる。

更に、クレブシュ・ゴルダン係数を決める漸化式にあたる漸化式も得る事ができる。

【2】 次に q 頂点演算子の合成則について述べる。

角運動量の場合、零でない行列要素が存在するのは表現の重みがクレブシュ・ゴルダン則を満たすときのみであった。その事情は q 頂点演算子でも同様で、 j_1 と j_2 との合成である j_3 は任意の値をとる訳には行かない。その条件は角運動量の場合と同様、表現の既約性、つまり特異場の入った行列要素が消える条件

$$\langle j_3 | \Psi_{j_2} | \text{特異場}_{j_1} \rangle = 0,$$

として導出され、結果は以下の様になる。

定理： 互いに素な正の整数 g と h に対して、レベルが $k+2 = g/h$ となる場合を考える。この時、許される表現の重み j は正の整数 r と s を用いて

$$2j+1 = r-s(k+2), \quad 0 < r < g, \quad 0 \leq s < h, \quad (*)$$

と表され、許される重み j_1, j_2, j_3 の組み合わせは

$$\begin{aligned} & \prod_{n=0}^{r-1} \prod_{m=0}^s [j_1+j_2-j_3-n+m(k+2)] \\ & \times \prod_{n=1}^r \prod_{m=1}^s [-j_1+j_2+j_3+n-m(k+2)] = 0, \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} & \prod_{n=0}^{g-r-1} \prod_{m=0}^{h-s-1} [-j_1+j_2+j_3-n+m(k+2)] \\ & \times \prod_{n=1}^{g-r} \prod_{m=1}^{h-s-1} [j_1+j_2-j_3+n-m(k+2)] = 0, \end{aligned}$$

の両者が成立するものに限られる。ここで $[n]$ は次の様な q 整数である。

$$[n] = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1}).$$

この合成則の公式により、許される重みの組み合わせは、次の2種類のワイル変換 $j_3 \rightarrow -j_3-1$, $j_3 \rightarrow -j_3+k+1$ と並進 $j_3 \rightarrow j_3+1$ で結びついている事が読み取れる。ただしレベルが整数ならばワイル変換は現れない。

更に、この合成則が閉じている事、つまり重み j_1 と j_2 が(*)の中に含まれていれば、それらの合成である j_3 もまた(*)の中に含まれているという事がわかる。

レベルが任意の複素数の場合の合成則も導出したが、それは今の場合のように有限個の重みで閉じるという性質は持ちあわせていない。

【3】 最後に q 頂点演算子の交換関係について述べる。

q 頂点演算子の合成 (O P E)

$$\Psi_{j_2, m_2}(z) | j_1, v \rangle = \sum_u | j_3, u \rangle \beta_{u, m_2}(z),$$

を用いる事により任意の N 点関数を3点関数に帰着させる事ができる。特に4点関数は重要な意味をもっており、それから q 頂点演算子の交換関係を決定することが可能である。

本論文では、 $j_1, j_4 \in \mathbb{C}$, $2j_2 \in \mathbb{Z}$ 及び $j_3=1/2$ の場合の4点関数

$$\langle j_4 | \Psi_{j_3, m_3}(z_3) \Psi_{j_2, m_2}(z_2) | j_1 \rangle,$$

の一般形を与え、それに基づき次の定理を得た。

定理: $2j_2 \in \mathbb{Z}$ 及び $j_3=1/2$ の場合の q 頂点演算子の交換関係は以下の様になる。

$$\begin{aligned} R^{ab}_{cd}(z_2/z_3) \Psi_{j_3, a^s}(z_3) \Psi_{j_2, b^t}(z_2) \\ = \Psi_{j_2, c^u}(z_2) \Psi_{j_3, d^v}(z_3) C^{st}_{uv}(z_2/z_3, 2j_4+1). \end{aligned}$$

ここで R と C はそれぞれスピン $(j_2, 1/2)$ の三角関数 R 行列及び I R F 型楕円関数 R 行列であり、また $\Psi_{j_2, a^s}(z_2): V_{j_1} \rightarrow V_{j_1+j_2-s}$ である。

▲ 結論

以上の様に本論文では $U_q(\widehat{sl_2})$ の q 頂点演算子の合成則と交換関係を導出し、合成則は主にワイル変換によって、又交換関係は R 行列によって記述されている事を発見した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 石 川 健 三
副 査 教 授 金 沢 昭
副 査 教 授 藤 井 寛 治
副 査 教 授 岩 田 健 三
副 査 助教授 日 比 孝 之

学 位 論 文 題 名

Exchange Relations for the
q-Vertex Operators of $U_q(\widehat{sl_2})$
(量子カッツ・ムーディー代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ における
q 変形頂点演算子の交換関係)

連続群論の表現論は物理に應用され、多くの成果を導いてきた。連続群論の拡張として近年定式化された量子群の数学的研究は多くなされつつあるが、物理への應用はまだあまりなされていない。應用に際しては、量子群の表現論の展開が不可欠である。

申請者は無限次元連続群論の代数であるカッツ・ムーディー代数を拡張して得られる量子カッツ・ムーディー代数の一つ $U_q(\widehat{sl_2})$ の表現論の基礎をかためるいくつかの定理の証明に成功した。 $U_q(\widehat{sl_2})$ は一次元スピン系 XXZ 模型及び一次元サイン・ゴールドン模型で成立することが Jimbo らによって明らかにされていた。しかしながら、その表現論については Wigner-Eckert の定理を初めとして多くの事柄が未知のままであった。申請者は $U_q(\widehat{sl_2})$ の q-変形頂点演算子の行列要素が満たす Wigner-Eckert の定理、合成則と共に、q-変形頂点演算子が満たす交換関係の証明を行った。

証明された Wigner-Eckert の定理は、群論の場合と同様変換性の決まっている頂点演算子の行列要素のすべては、一つの行列要素と、表現で決まる数係数とで決定されるというものである。この数係数であるクレプシュ・ゴールドン係数の満たす漸化式も得られた。

レベルが、互いに素な正の整数 g と h を使い、 $k+2 = g/h$ となる場合、表現の重み j は正の整数 r と s を用いて、

$$2j+1 = r-s(k+2), \quad 0 < r < g, \quad 0 < s < h$$

と表わされる。合成則として、 q 変形頂点演算子の合成に許される重み j_1, j_2, j_3 の組み合わせは、

$$\begin{aligned} & \prod_{n=0}^{r-1} \prod_{m=0}^s [j_1+j_2-j_3-n+m(k+2)] \\ & \times \prod_{n=1}^r \prod_{m=1}^s [-j_1+j_2+j_3+n-m(k+2)] = 0 \\ & \prod_{n=0}^{g-r-1} \prod_{m=0}^{h-s-1} [-j_1+j_2+j_3-n+m(k+2)] \\ & \times \prod_{n=1}^{g-r} \prod_{m=1}^{h-s-1} [j_1+j_2-j_3+n-m(k+2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{但し、} [n] = (q^n - q^{-n}) / (q - q^{-1})$$

を満たすことが示された。

最後に $j_1, j_4 = 0, 2j_2 = 2, j_3 = \frac{1}{2}$ の時、行列要素 $\langle j_4 | \phi_{j_3, m_3}(Z_3) \phi_{j_2, m_2}(Z_2) | j_1 \rangle$ の一般形を得ると共に、それに基づき、 q 変形頂点演算子 $\phi_{j, s}^s(Z)$ の交換関係として、三角関数 R 行列 R と、 IRF 型楕円関数 R 行列 C とを使い、

$$\begin{aligned} & R_{cd}^{ab}(Z_2/Z_3) \phi_{j_3, a}^s(Z_3) \phi_{j_2, b}^t(Z_2) \\ & = \phi_{j_2, c}^{\mu}(Z_2) \phi_{j_3, d}^r(Z_3) C_{uv}^{st}(Z_2/Z_3, 2j_4+1) \end{aligned}$$

を得た。

以上の諸定理は、 $U_q(\widehat{sl}_2)$ の表現論の基礎をなすものであり、高く評価されると共に、物理への応用の際重要な働きをするものと思われる。

よって審査員一同は申請者が博士（理学）の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。