

学 位 論 文 題 名

Pseudo - product graded Lie algebras of irreducible type

(既約型の擬積次数つきリー環)

学位論文内容の要旨

本論文の目的は、既約型の擬積次数つきリー環の構造を調べることである。以下、擬積次数つきリー環の幾何学的背景及び主定理を述べるために準備を行う。

$\mathfrak{m} = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p$ を有限次元次数つきリー環とし、 e, f を $\mathfrak{g}_{-1}$ の部分空間とする。その時、系 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}, (\mathfrak{g}_p)_{p < 0}, e, f)$ は、条件

- (1) $\mathfrak{m}$ は、 $\mathfrak{g}_{-1}$ で生成される。
- (2) $\mathfrak{g}_{-1} = e \oplus f$
- (3) $[e, e] = [f, f] = 0$

を満たすとき、擬積基本次数つきリー環と呼ぶ。

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{m}, (\mathfrak{g}_p)_{p < 0}, e, f)$, $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{m}', (\mathfrak{g}'_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e'^1, e'^2)$ を2つの擬積基本次数つきリー環とする。 $\mathfrak{m}$ から $\mathfrak{m}'$ 上への次数つきリー環としての同型写像 f は、位数2の置換 σ が存在して $f(e^i) = e'^{\sigma(i)}$ を満たすとき、 $\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{M}'$ 上への同型写像と言う。そして $\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{M}'$ 上への同型写像が存在するならば、 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}'$ に同型であるという。また、擬積基本次数つきリー環 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e, f)$ が条件 " $x \in \mathfrak{g}_{-1}, [x, \mathfrak{g}_{-1}] = 0 \Rightarrow x = 0$ " を満たすとき、非退化であるという。

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ を次数つきリー環とし、 e, f を $\mathfrak{g}_{-1}$ の部分空間とする。今、 $\mathfrak{g}_- = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p$, $\mathfrak{g}_- = (\mathfrak{g}_-, (\mathfrak{g}_p)_{p < 0}, e, f)$ と置く。系 $\mathfrak{G} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e, f)$ は、条件

- (1) $\mathfrak{g}_-$ は、擬積基本次数つきリー環。
- (2) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ は推移的である (すなわち $x \in \mathfrak{g}_p (p \geq 0), [x, \mathfrak{g}_-] = 0 \Rightarrow x = 0$)。
- (3) $[\mathfrak{g}_0, e] \subset e, [\mathfrak{g}_0, f] \subset f$

を満たすとき、擬積次数つきリー環と呼ぶ。特に、 $\mathfrak{g}_{-2} \neq 0$ であり、 $\mathfrak{g}_0$ -加群 e, f が既約である時、 $\mathfrak{G}$ は、既約型であるという。この場合 $\mathfrak{g}_-$ は非退化である。

$\mathfrak{G} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e, f)$, $\mathfrak{G}' = (\mathfrak{g}', (\mathfrak{g}'_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e'^1, e'^2)$ を2つの擬積次数つきリー環とする。 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ 上への次数つきリー環としての同型写像 f が存在して、 $f|_{\mathfrak{g}_-}$ が $\mathfrak{g}_-$ から $\mathfrak{g}'_-$ 上への同型写像となると、 $\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{G}'$ に同型であるという。

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e, f)$ を擬積基本次数つきリー環とする。 $\mathfrak{g}_0$ を $D \in \mathfrak{e}, Df \subset f, D\mathfrak{g}_p \subset \mathfrak{g}_p (p \leq -2)$ となる $\mathfrak{g}$ の微分全体のなすリー環とすると、 $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_0$ は推移的次數つきリー環となる。良く知られているように、推移的次數つきリー環 $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_p$ で $\mathfrak{g}_p = \tilde{\mathfrak{g}}_p (p \leq 0)$ を満たす最大ものが存在する。その時、系 $\mathfrak{G} = (\tilde{\mathfrak{g}}, (\tilde{\mathfrak{g}}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, e, f)$ は、擬積次数つきリー環になり $\mathfrak{M}$ の延長という。もし $\mathfrak{M}$ が非退化ならば、 $\tilde{\mathfrak{g}}$ は、有限次元である。このことから、既約型の

擬積分次数つきリー環 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, \epsilon, f)$ に対して, $\mathfrak{g}$ は有限次元であることが判る.

擬積分次数つきリー環は, 田中昇教授による常微分方程式の幾何学的理論と深く関係している. この理論は, 擬積分多様体を通じて常微分方程式を幾何学化するものである. 以下, 擬積分次数つきリー環が擬積分多様体の幾何といかに関係しているかをのべる.

R を多様体, E, F を R 上の微分形式とする. 対 (E, F) は, 条件

$$(1) E \cap F = 0$$

$$(2) E, F \text{ は完全積分可能.}$$

を満たすとき, R 上の擬積分構造と呼ばれる. 擬積分構造を備えた多様体を擬積分多様体とよぶ. $(R: E, F)$ を擬積分多様体とする. その時, $D = E + F$ と置くと D は, R 上の微分形式となる. そこで, D の局所断面の芽全体のなす層 $\mathcal{D}$ に対して, R の局所ベクトル場の芽全体のなす層 TR の部分層の族 $(\mathcal{D}^p)_{p < 0}$ を次のように定める.

$$\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}^p = \mathcal{D}^{p+1} + [\mathcal{D}^{p+1}, \mathcal{D}^{-1}] (p \leq -2)$$

R の各点 x に対して, 接空間 $T_x R$ の部分空間 $D^k(x)$ ($k \leq -1$) を, $D^k(x) = \{X_x \in T_x R : [X]_x \in \mathcal{D}_x^k\}$ によって定義する (ここで, ベクトル場 X に対して, $[X]_x$ で X の x での芽を, X_x で x での値をあらわす). 今我々は, 次を仮定する.

$$(i) D \text{ は正則である (すなわち, 各 } D^k(x) = \bigcup_{x \in R} D^k(x) \text{ は微分形式形である).}$$

$$(ii) \text{ ある正整数 } \mu \text{ が存在して, } D^{-\mu}(x) = T_x R \text{ } (\forall x \in R)$$

R の各点 x に対して, $\mathfrak{g}_{-1}(x) = D^{-1}(x)$, $\mathfrak{g}_p(x) = \mathcal{D}^p(x)/\mathcal{D}^{p+1}(x)$ ($p \leq -2$), $\mathfrak{m}(x) = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p(x)$ と置く. その時 自然に $\mathfrak{m}(x)$ 上にリー括弧が定義されて $\mathfrak{m}(x) = \bigoplus_{p < 0} \mathfrak{g}_p(x)$ は次数つきリー環になり, かつ $\dim \mathfrak{m}(x) = \dim R$ である. 更に $\epsilon(x) = E(x)$, $f(x) = F(x)$ と置くと, 系 $\mathfrak{m}(x) = (\mathfrak{m}(x), (\mathfrak{g}(x)_p)_{p < 0}, \epsilon(x), f(x))$ は, 擬積分基本次数つきリー環になる. これを x における微分形式 D の表象代数という.

擬積分基本次数つきリー環 $\mathfrak{m}$ が与えられたとき, 擬積分多様体 $(R: E, F)$ は, D が正則で, 各点 x で表象代数 $\mathfrak{m}(x)$ が $\mathfrak{m}$ に同型で, $\dim R = \dim \mathfrak{m}$ の時, $\mathfrak{m}$ 型であるという.

$\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}, (\mathfrak{g}_p)_{p < 0}, \epsilon, f)$ を非退化擬積分基本次数つきリー環, $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, \epsilon, f)$ をその延長とする. そのとき, 任意の $\mathfrak{m}$ 型の擬積分多様体 $(R: E, F)$ に対して, 多様体 P と P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式 ω であって条件 i) $\dim P = \dim \mathfrak{g}$, ii) P は R 上のファイバー多様体, iii) ω は P 上の絶対平行性を与える, を満たすものが存在することが田中昇教授によって示された. 特に, $(R: E, F)$ の無限小自己同型のなすリー環 $\mathfrak{a}$ は, 有限次元で $\dim \mathfrak{a} \leq \dim \mathfrak{g}$ を満たす. さらにある条件の下で (例えば, $\mathfrak{g}$ が単純または 3 階以上の常微分方程式から導かれるものならば), 自然に $(R: E, F)$ に同伴した R 上の $\mathfrak{g}$ 型のカルタン接続が存在する. この様に, 擬積分次数つきリー環を考察する事は, 幾何学的に意味を持つ.

常微分方程式から導かれる擬積分多様体に同伴した表象代数としての擬積分基本次数つきリー環 $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}, (\mathfrak{g}_p)_{p < 0}, \epsilon, f)$ の延長 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, \epsilon, f)$ は, 既約型であり更に次の条件を満足する

$$(g1) \mathfrak{g}_1 \neq 0$$

$$(g2) \mathfrak{g}_{-1}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g}_{-1} : [x, \bigoplus_{p \leq -2} \mathfrak{g}_p] = 0\} \neq 0$$

これらの条件を満足する擬積分次数つきリー環を分類するのが学位論文の目的である. すなわち, 次の主定理を得た

[定理] $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, \epsilon, f)$ を条件 (g1) を満たすまたは複素数体上の既約型の擬積次数つきリー環とする。その時、次が成り立つ。

(1) $\mathfrak{g}_2 \neq 0$ ならば、 $\mathfrak{g}$ は、有限次元単純リー環である。

(2) $\mathfrak{g}_2 = 0$ で、条件 (g2) を満たすならば、 $\mathfrak{g}$ は、ある既約 (l, M) 型または位数 2 の既約 (l, M, N) 型の擬積次数つきリー環に同型である。

ここで、上述の既約 (l, M, N) 型及び位数 2 の既約 (l, M, N) 型の擬積次数つきリー環は、次のように構成されるものである。

今、 $l = l_{-1} \oplus l_0 \oplus l_1$ を完約次数つきリー環であって、 $\bar{l} := l_{-1} \oplus [l_{-1}, l_1] \oplus l_1$ が単純であり、 $j(l) \subset l_0$ (ここで、 $j(l)$ は、 l の中心) となるものとする。また、 $M = \bigoplus_{p=-1}^{-k} M_p$ ($k \geq 2$) を有限次元の忠実な既約次数つき l -加群であって $M_{-1} \neq 0$ かつ M は、 l -加群として M_{-1} で生成されているものとする。

先ず第一に既約 (l, M) 型の擬積次数つきリー環を構成する。 M を可換リー環と考えて、 l の M による半直積 $\mathfrak{g} = l \ltimes M$ を構成する。そして $\mathfrak{g}$ 上に次数づけ $(\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ を

$$\mathfrak{g}_p = M_p \quad (p \leq -2), \quad \mathfrak{g}_{-1} = l_{-1} \oplus M_{-1}, \quad \mathfrak{g}_p = l_p \quad (p \geq 0)$$

によって定める。そのとき、系 $(\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, l_{-1}, M_{-1})$ は、既約型の擬積次数つきリー環となり、(g1)、(g2) を満足する。この擬積次数つきリー環を既約 (l, M) 型の擬積次数つきリー環という。

次に位数 k の既約 (l, M, N) 型の擬積次数つきリー環を構成する。上記の仮定に加えて、 N を $\wedge^2(M)$ の l -部分加群で、 $\wedge^2(M)/N$ が l -加群として自明となるものとする。今、 l -加群 $R = \bigoplus_{p < 0} R_p$ を $R_p = M_p$ ($-1 \geq p \geq -k$)、 $R_{-k-1} = \wedge^2(M)/N$ 、によって定義する。その時、 R は、次数つき l -加群になる。更に、 R 上のリー括弧を、 $[x, y] = \phi(x \wedge y)$ ($x, y \in M$) (ここで ϕ は $\wedge^2(M)$ から R_{-k-1} 上への自然な射影) および $[R, R_{-k-1}] = 0$ によって定義すると、 $R = \bigoplus_{p < 0} R_p$ は、次数つきリー環になり、 l の R 上への作用が微分としての作用になる。従って、 l の R による半直積 $\mathfrak{g} = l \ltimes R$ が構成できて $\mathfrak{g}$ 上の次数づけ $(\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ が

$$\mathfrak{g}_p = R_p \quad (p \leq -2), \quad \mathfrak{g}_{-1} = l_{-1} \oplus R_{-1}, \quad \mathfrak{g}_p = l_p \quad (p \geq 0)$$

によって定まる。その時、系 $(\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, l_{-1}, M_{-1})$ は既約型の擬積次数つきリー環となり、(g1) を満足する。この擬積次数つきリー環を位数 k の既約 (l, M, N) 型の擬積次数つきリー環という。特に $k = 2$ の時、(g2) を満足する。

また、我々は複素数体上の既約 (l, M) 型または位数 2 の既約 (l, M, N) 型である擬積次数つきリー環 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, (\mathfrak{g}_p)_{p \in \mathbb{Z}}, \epsilon, f)$ に対して、 $\mathfrak{g}_-$ の延長が無限次元となる場合を分類した。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 田 中 昇
副 査 教 授 鈴 木 治 夫
副 査 教 授 諏 訪 立 雄
副 査 助 教 授 山 口 佳 三

学 位 論 文 題 名

Pseudo-product graded Lie algebras

of irreducible type

(既約型の擬積次数つきリー環)

この学位論文は、微分方程式系の幾何学的理論において意味をもつものである。この理論は、微分方程式系を幾何構造として表現し、その構造の不変量の研究を通じて微分方程式系の分類問題と幾何学的積分問題を論ずることを目指している。主査は、かなり以前から、2階以上の階数をもつ常微分方程式系を含む一連の有限型微分方程式系に対する幾何学的研究を進めてきた。その研究の第1段階は、上述の微分方程式系を擬積多様体として表現することである。ここで、擬積多様体は、ある自然な条件を満足する積多様体の部分多様体の抽象化である。研究の第2段階は、擬積多様体に対して表象代数と呼ばれる最初の不変量を構成することである。この表象代数は、擬積多様体の各点の近傍における擬積構造の基本的性質を代数的に表現したものであり、擬積多様体の不変量の詳細な研究において極めて重要な役割を果たす。

この学位論文の研究対象である擬積次数つきリー環は、擬積多様体の表象代数の抽象化と見做しうるものであり、次のように定義される。 $\mathfrak{g} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ を次数つきリー環とし、 $\mathfrak{g}_- = \sum_{p < 0} \mathfrak{g}_p$ とおく。次の条件を満足する $\mathfrak{g}_-$ の部分空間の組 (e, f) が与えられたとき、 $\mathfrak{g} = \sum_p \mathfrak{g}_p$ を擬積次数つきリー環とよぶ。

(a) $\mathfrak{g}_- = \sum_{p < 0} \mathfrak{g}_p$ は基本次数つきリー環である。即ち、 $0 < \dim \mathfrak{g}_- < \infty$ であり、 $\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ によって生成される。

(b) $\mathfrak{g} = \sum_p \mathfrak{g}_p$ は推移的である。即ち、 $p \geq 0, x \in \mathfrak{g}_p, [x, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}$ ならば、 $x = 0$ である。

(c) $\mathfrak{g}_{-1} = e \oplus f, [e, e] = [f, f] = \{0\}, [\mathfrak{g}_0, e] \subset e, [\mathfrak{g}_0, f] \subset f$ 。

擬積次数つきリー環は、 $g_{-2} \neq \{0\}$ であり、かつ g の部分リー環 g_0 の e 及び f 上の自然な表現がともに既約であるとき、既約型と呼ばれる。申請者は、条件 $g_1 \neq \{0\}$, $g_2 = \{0\}$, $\theta_{-1}(g) \neq \{0\}$ を満足する既約型の擬積次数つきリー環の2種類のモデル——既約 (l, M) 型のモデルと位数2の既約 (l, M, N) 型のモデル——を構成した。ここで、

$$\theta_{-1}(g) = \{x \in g_{-1} \mid [x, g_p] = \{0\}, p \leq -2\}.$$

この学位論文における主定理は、適当な付帯条件を満足する既約型の擬積次数つきリー環に対する構造定理あるいは分類定理と見做しうるものであり、次のように述べられる。

主定理: $g = \sum_p g_p$ を複素数体または実数体上の既約型の擬積次数つきリー環とする。

(1) $g_2 \neq \{0\}$ ならば、 g は有限次元でありかつ単純である。

(2) $g_1 \neq \{0\}$, $g_2 = \{0\}$, $\theta_{-1}(g) \neq \{0\}$ ならば、 $g = \sum_p g_p$ は既約 (l, M) 型のモデルかまたは位数2の既約 (l, M, N) 型のモデルに同型である。

この主定理は、まず第1に擬積多様体の不変量の研究における基礎的な結果であり、第2に表象代数による擬積多様体の粗い分類に寄与する結果である。このように主定理は、擬積多様体の研究、従って有限型微分方程式系の幾何学的研究において重要な意味をもつ結果である。特に注目すべきは、主定理を基礎にして、将来意味のある新しい種類の有限型微分方程式系が発見される可能性がある点である。さらに主定理は、多変数の複素解析学の研究と密接に関係する擬複素多様体の幾何学にも応用しうるものである。ここで、擬複素多様体は、ある自然な条件を満足する複素多様体の実部分多様体の抽象化である。

主定理の証明は、長くまた容易ではない。申請者は、かなり大がかりなプログラムを設けて証明に臨み、有限次元リー環の表現論を駆使し、また次数つきリー環に対するカットの手法を活用するなど様々な工夫を凝らして、証明を完遂している。これは、申請者の力量と並々ならぬ数学的才能を物語るものである。

申請者は、参考論文で、擬積次数つきリー環の拡張である完全可約な深さ有限、推移的次数つきリー環に対する一般的な構造定理を証明し、また複素数体上の無限次元、深さ有限、単純次数つきリー環を分類することに成功している。

申請者提出の学位論文及び参考論文における上述の成果は、微分幾何学、微分方程式論及びリー環論の研究に新しい知見をつけ加えたものであり、高く評価される。2月10日に最終試験と外国語の試験が行われ、満足すべき結果を得ている。

審査員一同は、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があると認めた。