

学位論文題名

A condition for a two-weight norm inequality for
singular integral operators

(特異積分作用素に対する二つの重み付きノルム不等式に関する一つの条件)

学位論文内容の要旨

フーリエ解析においてよく使われる手法として、特異積分作用素等のノルム評価を行う際、対象となっている変換 $Tf(x)$ を元の関数 $f(x)$ の Hardy-Littlewood の maximal function $Mf(x)$ で評価し、 $Mf(x)$ に関する結果である maximal theorem に帰着させるという方法がある。その際、一番望ましいのは $Tf(x) \leq CMf(x)$ となる各点ごとの評価であるが、それは一般には望めない。そこである形の分布関数の評価により maximal function に帰着させる good λ 不等式とよばれる論法がある。これは重み付きの L^p ノルム評価である weighted norm inequality に対して Coifman-Fefferman を初めとして非常によく使われる常套的手法の一つになっている。また変数 $Tf(x)$ の (Fefferman-Stein の定義による) Sharp maximal function を $Mf(x)$ で評価する方法もそれと同時に weighted norm inequality に対する手法の一つになっている。

ここでは後者の sharp maximal function を用いる手法をとり、Carleson による Calderón-Zygmund 分解を改良したものを用いて $Tf(x)$ を

$$Tf(x) = g(x) + \sum_j b_j(x)$$

の形に分解し、 $g(x), b_j(x)$ を通常の積分平均に代わって、有限な可測関数に対して各 cube 上で決まる値 median により定義される sharp maximal function を用いて評価し (Strömberg Jawerth-Torchinsky)、それを $f(x)$ の dyadic maximal function でさらに評価するという手順で

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx \quad (1 < p < \infty)$$

が成立するための weight functions の組 (w, v) に対する一つの十分条件を呈示する。ただし T は Hilbert 変換、Riesz 変換等の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上で定義された関数の

Calderón-Zygmund型のなめらかさをもつ(maximal)特異積分作用素であり、 C は $f(x)$ によらず決まる定数である。

上の分解の $g(x)$ の部分はいわゆるgood partであり、maximal function $Mf(x)$ による評価がしやすい。それに対して $\{b_j(x)\}_j$ の方はsupportが互いに重なり合い評価がむずかしい部分になる。そこで L^p ノルムのまゝ(通常Calderón-Zygmund分解を用いる場合はweak type分布関数の評価で行う)、その重なり具合を他の定数と共に計算し、重複部分を関数の値にこめ、それが収束することを示す証明方法をここでは取る。この考えをより単純な場合に適用したのが、参考論文[4]のFefferman-Stein-Strömbergの不等式の別証である。

二つのweightが等しい場合に上のweighted norm inequality (*)が成立するための条件であるMuckenhouptの A_p 条件の著しい点のひとつは、それが同時にCoifman-Feffermanの A_∞ の性質を保証する点にある。 A_∞ の条件は $Tf(x)$ をそのsharp maximal function、あるいは $Mf(x)$ により評価するときに使われる。ふたつの異なるweightsの場合には A_p の形をとっても A_∞ のようなうまい性質が導かれない。そこで $w(x), v(x)$ それぞれ A_∞ に相当する性質をもたなくとも、両者を合わせた形で A_∞ の性質をもつように条件を設定する。この条件は上の不等式(*)に対する必要条件には一般にはならないが、もし必要十分な形のものが、two weightの場合に得られるとすれば、その条件中にmaximal functionあるいは変換 T そのものを用いないと表現がむずかしいと予想される。Muckenhouptの A_p 条件のように、できるだけそれらの変換を使わず、 A_p に近い形に表現できる条件を得るということも目指したところである。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 越 昭 三
副 査 教 授 安 藤 毅
副 査 教 授 岡 部 靖 憲
副 査 教 授 岸 本 晶 孝
副 査 教 授 中 路 貴 彦

学 位 論 文 題 名

A condition for a two-weight norm inequality
for singular integral operators

(特異積分作用素に対する二つの重み付きノルム不等式に関する一つの条件)

調和解析学の最も重要な結果の一つは Fefferman と Stein による Sharp maximal function f^* と f との関係が次のように与えられていることである。

$$\|f\|_p \leq c \|f^*\|_p \quad (0 < p)$$

この不等式を更に weight を付けた場合の拡張が多くの研究者によってなされてきた。

この論文では、これらの研究を更に進めて、特異積分作用素、特に核関数で定義される場合の 2 つの weight をもつ場合の不等式が成立するための重要な一つの十分条件を与えたことである。

すなわち $K(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の原点を除いて定義される核関数とする。今、 $K(x)$ には次の仮定をする。

$$(1) \quad |K(x)| \leq c_1 |x|^{-1}$$

$$(2) \quad |K(x) - K(x-y)| \leq c_2 |y|^\delta / |x|^{n+\delta} \quad \text{for } |x| > 2|y|.$$

ここで、 c_1, c_2, δ は正の定数である。

このとき

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \epsilon} K(x-y) f(y) dy \right|$$

で T^* なる作用素を定義する。

そこで主要な結果は次の不等式が得られるための条件 W_p を得たことである。

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T^* f(x))^p w(x) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx$$

さて、この結果を得るための数学的アイデアは次のようなものである。

Fefferman の sharp maximal function を用い

$$T^* f(x) = g(x) + \sum_j b_j(x)$$

の形に分解し、 $g(x), b_j(x)$ を通常の積分平均に代えて、有限な可測関数に対する各 cube 上で決まる median により定義される一様の sharp maximal function を用いて評価し、更にそれを $f(x)$ の dyadic maximal function を用いて更に評価するという手順で得られたものである。

この方法は、この論文の著者によって始めて考えられたもので、数学的にオリジナリティに富むものである。

更に weight $w(x), v(x)$ が等しいときには Muckenhoupt の得られた結果になり、しかも Muckenhoupt の証明方法とは全く異なることに特徴がある。特異積分としては Hilbert 変換、Riesz 変換その他古典的変換を含む、極めて広いクラスであり、その応用効果は著しいものがある。

以上の結果は、申請者の長年にわたるこの方面の真摯な研究によって始めてできたもので、申請者の独創的な問題意識と洞察力に基づく数学的に優れた仕事であると考えられる。

すなわち、調和解析における特異積分論の研究に更に深い知見を加えた点で高く評価される。

審査員一同は、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があるものと認めた。