

学位論文題名

Knots in solid torus

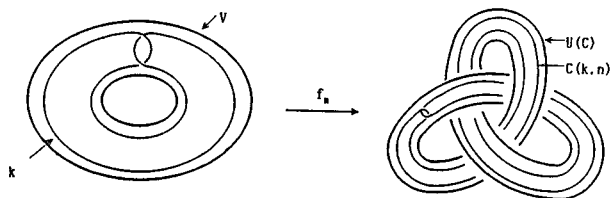
(ソリッド・トーラスのなかの結び目について)

学位論文内容の要旨

近年 Jaco-Shalen と Johanson によって Haken manifold に対し canonical な分解が存在することが示された。つまり Haken manifold M に対し、そのなかの incompressible tori の canonical な system $\{T_1, \dots, T_r\}$ が存在し、 M を $T_1, \dots, T_r$ で cut して得られる各 piece を component ごとに $P_1, \dots, P_r$ とするとき、それぞれの piece は Seifert fibered space か simple であるかのいずれかである。よく知られた Thurston の双曲化定理を用いると、simple piece には hyperbolic structure がはいることがわかる。そこで Seifert または hyperbolic である各 piece の性質を調べることによって、 M の性質を調べるという方法が考えられる。3 次元球面 S^3 のなかの knot に対し、その exterior は Haken manifold であるので、この立場は knot theory に強力な道具を与えられ考える。

satellite knot の概念は Schubert により導入されたが、Thurston の双曲化定理の帰結として S^3 のなかの knot は torus knot か hyperbolic knot か satellite knot のいずれかであることが知られている。我々は前述の立場から satellite knot を研究する。つまり、satellite knot を solid torus のなかの knot と S^3 のなかの core と呼ばれる knot からつくられるものと見て、 S^3 のなかの satellite knot と core, solid torus のなかの knot などとの関係を調べる。又 core が trivial な場合 (この場合は satellite knot とは呼ばないが) に付いても調べる。

問題を定式化するため定義を述べる。 $V=D^2 \times S^1$ を向き付けられた solid torusとし,
 $l_v = [*] \times S^1$ ($* \in \partial D^2$) を向き付けられた longitude とする。 k を V のなかの knot とする。
 C を向き付けられた 3 次元球面 S^3 の向き付けられた knot (これを core と呼ぶ) とし,
 $U=U(C, S^3)$ を C の正則近傍とする。 l_u を C と同じ向きの U の longitude, m_u を C との絡み数
 が 1 になる様に方向付けられた U の meridian とする。任意の整数 n に対し, V から U へ
 の向きを保つ同相写像 f_n で $f_n([l_v]) = [l_u] + n[m_u]$ となるものが存在する。ここで $[]$ は
 $H_1(\partial V)$ 又は $H_1(\partial U)$ の homology class を表す。このとき k の像 $f_n(k)$ を $C(k, n)$ と表す。
 特に $n=0$ のとき $C(k) = C(k, 0)$ とする。 k が向き付けられているときは $C(k, n)$ も向き付け
 られていると考えることができる。 V の meridian disk と k の geometric intersection
 number を $\omega_v(k)$, algebraic intersection number を $\text{Wind}_v(k)$ で表す。knot が向き付き
 knot として同じ type のときには “ $\simeq$ ”, 向きを無視して同じ type のときには “ $\approx$ ”,
 自分自身又はその鏡像と向きを無視して同じ type のときには “ $\sim$ ” という記号を用い
 る。



我々の考えたい問題は以下の様に定式化することができる。

- 問題 1 $C(k, m)$ と $C'(k, n)$ が同じ type のとき C と C' は同じ type か。
- 問題 2 $C(k, m)$ と $C(k, n)$ が同じ type のとき $m=n$ か。
- 問題 3 $C(k, n)$ と $C(k', n)$ が同じ type のとき k と k' は同じ type か。

$\omega_v(k)=0$ のときには, S^3 の任意の knot C, C' と任意の整数 m, n に対して, $C(k, m) \simeq C'(k, n)$ がわかるので以下 $\omega_v(k) \neq 0$ とする。問題 1 は core が non-trivial なときは
 すこし制限をつけると次の肯定的な解答が得られる。

定理 1 k を V のなかの knot で $\text{Wind}_v(k) \neq 0$ となるものとし, C, C' を S^3 のなかの
 non-trivial knot とする。このとき $C(k, m) \simeq C'(k, n)$ ならば $C \simeq C'$ が成立する。

$\text{Wind}_V(k) \neq 0$ が満たされないときは次の反例がある。 V を S^3 の standard solid torus とし k_0 を V のなかの knot で S^3 で non-invertibleなものとする。 k を k_0 の untwisted doubleとし, $C=k_0 \# \overline{k_0}$, $C'=\overline{k_0} \# k_0$ とおくと, $C \not\approx C'$ 。しかしこのとき $C(k)=\text{untwisted double of } k_0 \# \overline{k_0} \# k_0 \approx \text{untwisted double of } \overline{k_0} \# k_0 \# k_0 = C'(k)$ が成立する。又 coreが trivialな場合との比較については相馬により次が得られている。 C_0 を trivial, C を non-trivialとすると, $\omega_V(k) \neq 0$ ならば $C(k, m) \sim C_0(k, n)$ 。

$\omega_V(k) \leq 1$ のときは任意の m, n について $C(k, m) \approx C(k, n)$ がわかるので, 問題2に関しては $\omega_V(k) \geq 2$ を仮定する。coreが non-trivialのとき問題2は肯定的である。

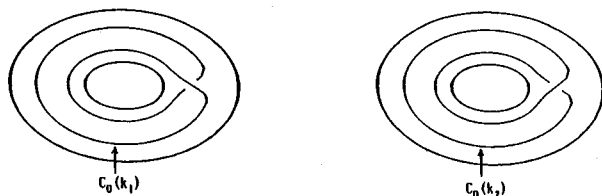
定理2 C を S^3 の non-trivial knot とし, k を V の knot で $\omega_V(k) \geq 2$ のものとする。このとき $C(k, m) \approx C(k, n)$ ならば $m=n$ が成立する。

coreが trivial knot C_0 のときは反例が存在する。 S^3 の任意の knot K に対し, V のなかのある knot k で $\omega_V(k)=2$ となるものが存在し, $K=C(k)$ かつ $C(k) \approx C(k, 1)$ が成立する。しかしこの場合でも無限個の整数に対し同じ type になることはないことが次でわかる。

定理3 C_0 を S^3 の trivial knot とし, k を V の knot で $\omega_V(k) \geq 2$ のものとする。このとき $C_0(k, n_1) \sim C_0(k)$ となる n_1 は高々有限個である。

特に $C_0(k)$ も trivial のとき次を得る。

定理4 k を V の knot, $C_0, C_0(k)$ を S^3 の trivial knot とする。下図の例外をのぞいて, $n \neq 0$ のとき $C_0(k, n)$ は non-trivial。 k_1 については $n=1$ のときのみ $C_0(k_1, n) \approx C_0(k_1)$ 。
 k_2 については $n=-1$ のときのみ $C_0(k_2, n) \approx C_0(k_2)$ 。



問題3についてはいくつかの付加的条件のもとで我々は次を得る。

定理5 k, k' を V の knot で $\omega_V(k) \neq 0, \omega_V(k') \neq 0$ とする。 $C_0, C_0(k), C_0(k')$ はすべて trivial とする。このとき無限個の n_i について $C_0(k, n_i) \approx C_0(k', n_i)$ が成立すれば, $k \approx k'$ が成立する。

問題3については一般的には反例が存在することが知られている。

学位論文審査の要旨

主 査 教 授 鈴 木 治 夫
副 査 教 授 田 中 昇
副 査 教 授 諏 訪 立 雄
副 査 助 教 授 西 森 敏 之

学 位 論 文 題 名

Knots in solid torus

(ソリッド・トーラスのなかの結び目について)

W. Thurston の 3 次元多様体に対する双曲化定理により、3 次元球面 S^3 の中の結び目はトーラス形、サテライト形或いは双曲形の何れかであることがわかっている。トーラス形についてはその不変系がよく知られている。申請者は次の段階のサテライト形を考察した。サテライト形結び目とは、 S^3 に含まれるトーラス体の結び目 k のことで k は V の任意の経線円板と交わる、いわゆる幾何学的に本質な結び目を対象とする。

V の中心曲線、芯 $\text{Core}(V)$ はまた S^3 の中の結び目である。 V は $\text{Core}(V)$ の管状近傍であり、このようなトーラス体によって結び目を記述する方法は、J. Milnor の絡み目の研究に端を発するもので、結び目に対する一つの基本的な研究方法である。

V^* を S^3 の中の別のトーラス体とし、 V を V^* に写す、向きを保つ位相同形写像 f に対し申請者は、 k と $f(k)$ の結び目形から $\text{Core}(V)$ と $\text{Core}(V^*)$ の結び目形の相異を判定する問題を考えた。

$U(k)$ を k の正則近傍とし $\overset{\circ}{U}(k)$ をその内部とすると、W. Haken の非圧縮曲面による有限分割定理を $V \setminus \overset{\circ}{U}(k)$ に適用することによって、 k と V の経線円板との代数的交点数が 0 でないとき、 $\text{Core}(V)$ と $\text{Core}(V^*)$ ($V^* = f(V)$) が非自明で、 k と $f(k)$ が同一の向きつき結び目形をもつならば $\text{Core}(V)$ と $\text{Core}(V^*)$ も同じ向きつき結び目形をもつことを証明した。この結果は本論文の主要定理であって Theorem 2 として述べられている。

一方、相馬徹は $\text{Core}(V)$ が自明で、 $\text{Core}(V^*)$ が非自明ならば、 k と $f(k)$ の結び目形は異なることを示している。そこで、 k と経線円板との代数的交点数が0でないとき、 k と $f(k)$ の向きつき結び目形が一致すれば $\text{Core}(V)$ と $\text{Core}(V^*)$ の向きつき結び目形も一致するという、美しい結論がいえる。この主定理を基礎にして更に結び目の考察を進めている。その主なものを次に挙げておく。

S^3 の中のトーラス体 V の緯線を ℓ 、経線を m とし、そのホモロジー類を $[\ell], [m]$ とかく。 f_n を V からそれ自身の上への位相同形写像で $[\ell]$ を $[\ell] + n[m]$ に写すものとする。 f_n を振れと呼ぶ。振れ f_n により S^3 の新しい結び目 $f_n(k)$ が得られる。 k が V の中の結び目で経線円板との幾何学的交点数が2以上とする。このとき $f_n(k)$ と $f_{n'}(k)$ が同じ結び目形をもつならば $n=n'$ となる。(Theorem 3)

$\text{Core}(V)$ が自明で、 k の経線円板との幾何学的交点数が2以上のとき、 $f_n(k)$ と k が鏡像および向きを除いて同じ結び目形となるような n は高々有限個に限られる。(Theorem 4)

$\text{Core}(V)$ が自明、 k と k' は共に V に含まれる S^3 の自明な結び目とし、経線円板との幾何学的交点数は共に0でないとする。無限個の異なる n に対し、 $f_n(k)$ と $f_n(k')$ が同一結び目形を持つならば、 V における k と k' の結び目形は一致する。(Theorem 6)

結び目 k を一般化した絡み目 ℓ についても同様な考察がなされる。 ℓ の各成分 k_i が互いに交わらないトーラス体 V_i に含まれ、各 k_i の経線円板との代数的交点数が0でないとする。このとき、 k と $f(k)$ が同じ向きつき絡み目形をもつならば $\text{Core}(\bigcup_i V_i)$ と $\text{Core}(\bigcup_i f(V_i))$ の向きつき絡み目形が一致する。(Theorem 7) また、Theorem 3の絡み目に対する類似も成り立つ。(Theorem 8)

定理の証明はトーラス体 V における結び目 k の補集合として得られる3次元多様体にW. Hakenの有限分割定理を適用し、分割要素の数に関する帰納法によって $\text{Core}(V)$ と k の間の関連を記述することに基づいており、これは申請者の独創性によるものである。これらの結果は結び目の理論に新しい知見を加え、重要な寄与をしている。

審査員一同は、申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があると認めた。