

学 位 論 文 題 名

Integral comparison theorems for relative Hardy spaces
of solutions of the equations $\Delta u = Pu$ on a Riemann surface

(リーマン面上の方程式 $\Delta u = Pu$ の解の
ハーディ空間に関する積分比較定理)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

双曲形リーマン面 R 上で定義された微分方程式 $\Delta u = Pu$ に関して、関数 P の変化がこの方程式の解空間に及ぼす影響について一つの結果を示そうとするものである。ここでリーマン面 R が双曲形としたのは以下の議論に必要な関数が R の上で意味を持つことを保証するためである。密度関数と呼ばれる P はこの方程式がリーマン面 R の局所座標に独立に定義されるための条件、及びこの方程式が2回連続的に微分可能な解をもちための条件をみたしているものと仮定する。リーマン面 R 全体で定義された1より小さい、この方程式の正の解の集合の中で最大な解が正であれば、密度関数 P は双曲的(hyperbolic density)といわれ、この解を e^P とかき、 R の P -楕円測度と呼ぶ。方程式 $\Delta u = Pu$ の解を以後 P -調和関数とよぶことにする。リーマン面 R 全体で定義された P -調和関数のうち有界なものの集合を $PB(R)$ とかき、上限ノルム(sup norm)を付けて考える。 P -調和関数 f と e^P との商 f/e^P を e - P -調和関数と呼ぶ。 $1 \leq p < +\infty$ にたいして、 $|f/e^P|^p$ より大きい e - P -調和関数が存在するような f/e^P の集合を $PH_{\bullet}^p(R)$ とかき、方程式 $\Delta u = Pu$ のハーディ空間と呼ぶ。 $|f/e^P|^p$ より大きい e - P -調和関数のうち最小な e - P -調和関数の固定点 $z_0 \in R$ における値を f/e^P のノルムとする。 $p = +\infty$ の時は $PH_{\bullet}^{\infty}(R) = PB(R)$ とする。普通の調和関数を扱う場合は $e^P = 1$ であるので、このハーディ空間は通常のハーディ空間になる。本論文の目的は、二つの異なる双曲形密度関数 P, Q にたいしてハーディ空間 $PH_{\bullet}^p(R), QH_{\bullet}^p(R)$ を考え P, Q が中井氏の積分条件

$$\int_R |P(w) - Q(w)| dx dy < +\infty$$

をみたすとき、これら二つのハーディ空間が等距離同型であることを示すことである。

このうち $p = +\infty$ の場合は中井氏により以前に得られている(M. Nakai, 1960). より強い条件のもとでは H. Royden も同じ結果を得ている。

平面の円盤上で負でない調和関数はポワソン核により円周上の測度で積分表示される。\$n\$ 次元ユークリッド空間の一般領域 \$D\$ についてもマルチン (R. S. Martin, 1941) が示したように、\$D\$ 上の非負調和関数は \$D\$ のマルチン境界上の測度によりマルチン核で積分表示される。このマルチンの積分表示は、\$D\$ が平面の円盤のときポワソンの積分表示と同一のものとなる。調和関数が定義できる一般的な 2 次元領域である双曲形リーマン面においても、マルチンの積分表示の理論はブルロー (M. Brelot, 1956) により展開されている。双曲形リーマン面 \$R\$ で原点を \$z_0\$ とするマルチン完閉化を \$R^*\$ とし、マルチン境界を \$\Delta\$ とする。\$\Delta\$ の各点 \$b\$ にはマルチン核 \$K(z, b)\$、\$(z, b) \in R \times \Delta\$ が対応し \$K(z_0, b) = 1\$ を満たしている。特にマルチン核 \$K(z, b)\$ が最小関数 (minimal function) である境界点 \$b\$ の集合を \$\Delta_1\$ とかく。任意の非負調和関数 \$u\$ は一意的に定まる \$\Delta_1\$ 上の測度 (canonical measure) により核 \$K(z, b)\$ の積分として表現される。恒等的に 1 である調和関数を積分表示する \$\Delta_1\$ 上の測度を \$R\$ の調和測度 (harmonic measure) とよぶ。このようなマルチン境界は調和関数、すなわち方程式 \$\Delta u = 0\$ の解の族に固有のものである。方程式 \$\Delta u = Pu\$ に固有なマルチン境界もほぼ同様に構成されることが知られている (M. Nakai, 1960)。この境界は \$P\$-マルチン境界と呼ばれ \$\Delta_P\$ と記される。この場合のマルチン核を \$K^P(z, b)\$ と書き、この関数が最小であるような点 \$b\$ の集合を \$\Delta_{P1}\$ で表わす。\$P\$-楕円測度 \$e^P\$ を積分表示する \$\Delta_{P1}\$ に分布する測度は \$P\$-調和測度と呼ばれ \$\chi_P\$ と記す。

リーマン面 \$R\$ の境界 \$\Delta_{P1}\$ の各点 \$b\$ に本来の位相より強い細位相 (fine topology) をを導入するならば、負でない \$P\$-調和関数 \$u\$ は測度 \$\chi_P\$ に関してほとんどいたるところ極限値を持つ (L. L. Naim, 1958)。この意味の極限は細極限 (fine limit) と呼ばれている。L. L. Naim はリーマン面とこの上で定義された \$P\$-調和関数の族との組みのより一般化であるブルロー (M. Brelot) の調和空間 (harmonic space) 上のハーディ空間に含まれる関数の境界挙動を論じた (1967)。この結果を方程式 \$\Delta u = Pu\$ の解からなるハーディ空間 \$PH_{\bullet}^P(R)\$ に適用すれば、\$PH_{\bullet}^P(R)\$ の関数 \$f/e^P\$ は \$\chi_P\$ に関しいたるところ細極限を持ち、この境界関数はルベグ空間 \$L^p(\Delta_{P1}, \chi_P)\$ に含まれる。このようにして定義される写像 \$PI_{\bullet}^P: PH_{\bullet}^P(R) \rightarrow L^p(\Delta_{P1}, \chi_P)\$ は中へ等距離的な同型写像を与える。従ってリーマン面 \$R\$ 上の二つの密度関数 \$P, Q\$ に対応する二つのハーディ空間 \$PH_{\bullet}^P(R), QH_{\bullet}^P(R)\$ が等距離的に同型であることを示す我々の問題は \$\Delta_{P1}, \Delta_{Q1}\$ の間に両側可測写像を構成してこの写像による \$\chi_P\$ の像と \$\chi_Q\$ の関係を調べることに帰着する。

方程式 \$\Delta u = Qu\$ に関するリーマン面 \$R\$ のグリーン関数を \$G^Q(z, w)\$ とかくことにする。\$\Delta_{P1}\$ の点 \$b\$ で、条件

$$\int_R |P(w) - Q(w)| G^Q(z, w) K^P(w, b) du dv < +\infty$$

をみたすものの集合を \$\Delta_{PQ}\$ とする。\$\Delta_{PQ}\$ の \$b\$ にたいして

$$T_{PQ} K_b^P(z) = K_b^Q(z) + \frac{1}{2\pi} \int_R (P(w) - Q(w)) G^Q(w, z) K^P(w, b) du dv$$

と置く。 $K_{\alpha}^p(w)$ は $K^p(w, b)$ のことである。もしこの Q -調和関数 $\text{Tr}_\alpha K_{\alpha}^p(z)$ が 0 でなければ $\Delta_{\alpha 1}$ のただ一つの点 a が決まる。したがって $\Delta_{\alpha 0}$ から $\Delta_{\alpha 1}$ への写像が定義できる。この写像の定義域を適当に縮小し全単射で両側可測な写像 $t_{\alpha 0}: \Delta^{\alpha}_{\alpha 0} \rightarrow \Delta^{\alpha}_{\alpha 1}$ に変更出来る。この写像 $t_{\alpha 0}$ をもとにして、ふたつの密度関数 P, Q が中井氏の条件をみたせば二つのルベーク空間 $L^p(\chi_P, \Delta^{\alpha}_{\alpha 0}), L^p(\chi_P, \Delta^{\alpha}_{\alpha 1})$ の等距同型性がしめされる。これが二つのハーディ空間 $PH_{\alpha}^p(R), QH_{\alpha}^p(R)$ の等距離同型性を導くことが出来る。

主 査 教 授 越 昭三
副 査 教 授 安藤 毅
副 査 教 授 岡部 靖恵
副 査 教 授 岸本 晶孝

Integral comparison theorems for relative
Hardy spaces of solutions of the equations

$$\Delta u = Pu \text{ on a Riemann surface}$$

(リーマン面上の方程式 $\Delta u = Pu$ の解の
ハーディ空間に関する積分比較定理)

双曲形リーマン面 R 上で定義された微分方程式

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = Pu$$

に関して、関数 P を種々変えることによってこの方程式の解空間にどのような影響を与えるかの研究は 1960 年頃より、H.Royden, M.Nakai 等によって始められていたが特別の場合しか結果が得られていなかった。

リーマン面が双曲形であることの仮定は方程式の解空間が十分存在するための条件であるのでこれらの議論に必要であるがリーマン面が双曲型であるとき 1 より小さい方程式の解の中で最大な解 e^P が定義され、これを P -elliptic measure と呼ぶ。リーマン面 R 全体で定義された $\Delta u = Pu$ の解を P -調和関数とよび、 P -調和関数のうち有界なものの集合を $PB(R)$ と書き、sup norm を付して考えることとする。 P -調和関数 f と e^P との商 f/e^P を e - P -調和関数と呼ぶことにする。

$1 \leq p < \infty$ に対して $|f/e^P|^p$ が elliptic measure により可積分である e - P -調和関数の全体を $PH_p^P(R)$ で表わす。これを relative Hardy space という。もしもリーマン面が通常のユークリッド平面内の領域の場合では、 $e \equiv 1$ であるので通常の Hardy space になるわけである。

さてこの論文の目的は次の定理を証明することである。

定理 R を双曲型リーマン面とし、2 つの双曲型の密度関数 P, Q に対して、その relative Hardy spaces $PH_p^P(R), QH_p^Q(R)$ ($1 \leq p < \infty$) は次の条件

$$(*) \quad \int_R |P(z) - Q(z)| dz dy < \infty$$

をみたすとき、互いに等距離同型である。

さて、この定理の証明には Martin 境界の理論が必要となる。

平面の円盤上で負でない調和関数は Poisson Kernel により円周上の測度で積分表示される。 n 次元ユークリッド空間の一般領域 D についても Martin が 1941 年に示したように D 上の非負調和関数は D の Martin 境界上の測度により Martin Kernel での積分表示となる。調和関数が定義できる一般的な双曲型 2 次元領域においても、Brelot (1956 年) の理論が同様に展開されていて、方程式 $\Delta u = Pu$ においても同様に Martin 境界が構成されることが分り、これを Δ_P とし、この場合の Martin Kernel を $K^P(z, b)$ と書くとき、この関数が最小である点 b の集合を Δ_{P_1} を表すものとする P -elliptic measure e^P の積分表示に表われる測度を P -調和測度と呼ばれ X_P で表わすこととする。このとき、次の事実

“ $PH^p_0(R)$ と $L^p(\Delta_{P_1}, X_P)$ とは等距離同型である”

は彼の副論文の結果である。

一方 $L^p(\Delta_{P_1}, X_P)$ と $L^p(\Delta_{Q_1}, X_Q)$ とが等距離同型であることの証明は X_P と X_Q との関係を巧妙に用いて、 Δ_{P_1} と Δ_{Q_1} との両側可測写像の存在を証明することに成功し、結局当定理の証明に解決を与えた。以上の結果は申請者のこの方面の長年にわたる真摯な研究により始めて出来たもので、申請者の独創的なアイデアは数学的に優れたものと認められる。

審査員一同は申請者が博士(理学)の学位を受けるに十分な資格があると認めた。