

学 位 論 文 題 名

ON QUASI-PURIFIABLE SUBGROUPS
AND THE INTERSECTION PROBLEM

(準純粋包をもつ部分群と共通部分問題について)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

群はすべてアーベル p 群とする。群 G が与えられたとき、その任意の部分群に対して、neat hull (その部分群を含む最小の neat subgroup) が存在することはよく知られている。しかし、その部分群を含む最小の pure subgroup (これを pure hull という) は必ず存在するとは限らない。そこで、いかなる部分群について pure hull が存在するかという問題が生れる。そこで、pure hull をもつ部分群を、purifiable subgroup と定義する。一方、直和因子は pure subgroup であるが、その逆は成立しない。では、いかなる pure subgroup が直和因子となるかという問題が生じるが、この問題に関して次のような結果がある。

群 G の部分群 A が G の pure subgroup であるための必要十分条件は、 $G[p]/A[p]$ が $G/A[p]$ の purifiable subgroup となることである。(命題 1.12)

従って、purifiable subgroup を特徴付けすることが、必要となる。そこで、[3],[4],[8],[13] の研究がされた。これらを要約すると次のようになる。

群 G の部分群 A が、purifiable subgroup で、その pure hull を H とするとき、 H の構造は次のようになる。

- (1) $H = M \oplus N$, ただし M, N は H の部分群。
- (2) $M[p] = A[p], N$ は bounded である。即ち、ある整数 m に対して、 $p^m N = 0$ 。従って、 $p^m G[p] \subseteq A$ 。
- (3) A は H の almost-dense subgroup である。

まず、新しい invariant である、 G における A の n -th overhang $V_n(G, A)$ を導入する。これを使って A が G の purifiable subgroup であるための必要条件 $V_n(G, A) = 0$ for almost all $n \geq 0$ (この条件を満たす部分群 A を G の eventually vertical subgroup という) を得る。この条件が、必要十分でないことは明かであるので、次にいかなる群 G において、または、いかなる部分群 A において、この条件が必要十分条件となるかを調べる。まず、部分群 A が G の almost-dense subgroup のとき必要十分となることを証明する。

次に A が G の中で、kernel of purity のとき、 A は G の purifiable subgroup であることは、自明の事実である。この事実から、 A が G の kernel of purity であることの新しい特徴付け (n -th overhang に関係した) を示し、さらに 2 つの十分条件を示す。それらは、次の結果である。

群 G の部分群 A が G の中で、kernel of purity であるための必要十分条件は、 $A[p]$ が $G[p]$ のなかで dense であるか、または、次の条件をみたす非負整数 k が存在することである。 $A_0(G) = A_k(G) \neq A_{k+1}(G)$ and $D_n(G, A) = 0$ for all $n > k$ 。

群 G の部分群 A が、purifiable subgroup となるための十分条件は、次の 2 つである。

- (1) $A_n(G) = A_{n+1}(G)$ for all $n \geq m$ となる非負整数 m が存在する。
- (2) $D_n(G, A) = 0$ for all $n \geq m$ となる非負整数 m が存在する。

K. Benabdallah, B. Chales, A. Mader [2] では、すべての部分群が eventually vertical subgroup となる群 G を特徴付けている。即ち、群 G の reduced part が、quasi-complete p -group となることである。このことは、第 7 章でその概要を述べている。次に、purifiable subgroup よりも条件の弱い quasi-purifiable subgroup の概念を導入する。群 G の部分群 A が quasi-purifiable subgroup であるとは、 A を含む pure subgroup K があって、 A が K の almost-dense subgroup であるような G の pure subgroup K が存在することをいう。(これは、pure hull の条件の (3) のみを満たしている) またこの K を A の quasi-pure-hull という。

そこで、この概念を使って、[2]で特徴付けした群（その reduced part が quasi-complete p-group）のさらに細かい特徴付けを与える。

群Gが、その reduced part が quasi-complete p-group である群となるための必要十分条件は、Gのすべての部分群が quasi-purifiable subgroup である。

さらにこの結果から、「群Gが torsion-complete p-group のとき、すべての部分群は、その部分群を含む極小の直和因子をもつ」という結果を得る。

一方、共通部分問題 (Intersection Problem) とは、つぎのような問題をいう。一般に、いくつかの pure subgroup の共通部分は、部分群にはなるが pure subgroup となるとは限らない。そこで逆に、いくつかの pure subgroup の共通部分となるのはいかなる部分群かということが問題となる。すでに、無限個の pure subgroup の共通部分となる部分群の特徴付けはなされている。([7],[11],[24]) そこで、L.Fuchs は[10]のなかで次のような問題を提起している。これを共通部分問題という。

共通部分問題 一般のアーベル群において、有限個の pure subgroup の共通部分となる部分群を決定せよ。

K.Benabdallah and S.Robert [6] において、p 群における、有限個の neat subgroup の共通部分となる部分群の特徴付けがなされた。その中で、彼らは部分群Aの neat hull をNとすると、 $\dim(N/A)$ が invariant となることに着目して、次のような結果を得た。

群Gの部分群Aが、m個の neat subgroup の共通部分となるための必要十分条件は、次のことである。

$$(m-2) \dim(G[p]/A[p]) \leq \dim(N/A) < (m-1) \dim(G[p]/A[p]).$$

さらに、 $\dim(G[p]/A[p]) < \infty$ のとき、 $m=2$ である。

そこで、群Gの部分群Aが、quasi-purifiable のとき、その quasi-pure-hull をKとすると、 $\dim(K/A)[p]$ が invariant になることを示し、これを $\text{Def}(G,A)$ と定義し、また、 $\dim(G[p]/K[p])$ も invariant となることを証明して、これを $\text{Com}(G,A)$ と定義して、それぞれ、GにおけるAの defective dimension 及び complemental dimension と名付ける。この概念を使って、群Gの reduced part が quasi-complete p-group のとき、共通部分問題の完全解答を得る。結果は次の通りである。

群Gの reduced part が quasi-complete p-group のとき、その部分群AがGの有限個の pure subgroup の共通部分となるための必要十分条件は、次の通りである。

ある正の整数 t が存在して、 $\text{Def}(G,A) \leq t \text{Com}(G,A)$ が成り立つ。

次にこの共通部分問題のさらに詳しい特徴付けを試みる。上の特徴付けにおける、部分群Aを含む pure subgroup は必ずしもAの pure hull とは限らない。そこで、この部分群Aが、有限個のAの pure hull の共通部分となるのはいかなるときか？という問題を提起する。このときAは、purifiable subgroup となる。従って、ある非負整数 m が存在して、 $V_n(G,A)=0$ for all $n \geq m$ となる。そこでまず、Reduction 定理を導く。

群Gの部分群Aが、その有限個の pure hull の共通部分となるためには、つぎの2つのことが同時に成立しなければならない。

- (1) $p^n G$ の中で、 $p^n G \cap A$ は有限個の pure subgroup の共通部分となる。
- (2) ある正の整数 t が存在して、 $\text{Def}(G,A) \leq t \text{Com}(G,A)$ が成り立つ。

従って、今後この問題に対しては、 $V_n(G,A)=0$ for all $n \geq 0$ という条件を付けてよいことになる。またさらに、部分群Aが上で述べた2つの purifiable subgroup となるための十分条件を満たすとき、この問題の完全解答を得る。そこで、上で述べた $\text{Def}(G,A)$, $\text{Com}(G,A)$ をさらに拡張して、次のように定義する。

$$\text{Def}_n(G,A) = \dim(p^n(H/A)), \text{Com}_n(G,A) = \dim(p^n G[p]/p^n H[p])$$

このとき、Hは部分群Aの pure hull であって、これらはHのとり方によらない。これを使って次の結果を得る。

部分群Aに対して、ある非負整数 m が存在して、 $A_n(G)=A_{n+1}(G)$ for all $n \geq m$ が成り立つとき、このAが有限個のAの pure hull の共通部分となるための必要十分条件は、次の条件を満たす正の整数 s , t が存在することである。

$$\text{Def}(G,A) \leq t \text{Com}(G,A), \text{Def}_m(G,A) \leq s \text{Com}_m(G,A)$$

部分群Aに対して、 $D_n(G,A)=0$ for all $n \geq m$ となる非負整数 m が存在するとき、このAが有限個のAの pure hull の共通部分となるためには、ある正の整数 t が存在して、 $\text{Def}(G,A) \leq t \text{Com}(G,A)$ が成り立つことである。なお、このとき、 $\text{Com}(G,A) = \text{Com}_m(G,A)$ となる。

以上

学 位 論 文 審 査 の 要 旨

主 査	教 授	都 筑 俊 郎
副 査	教 授	諏 訪 立 雄
	教 授	菅 野 孝 三
	助 教 授	吉 田 知 行

ON QUASI-PURIFIABLE SUBGROUPS AND THE INTERSECTION PROBLEM

(準純粋包をもつ部分群と共通部分群問題について)

奥山京氏提出の学位論文は、無限アーベル群、特に(準)純化可能部分群と共通部分群問題に関するものである。本論文には申請者によって得られた多くの興味深い定理がある。以下でやや詳しく述べるが、主要な成果は、新しく導入した相対不変量を用いて(準)純化可能部分群になるための条件を与えたことと、共通部分群問題に対する一つの解答を与えたことである。

以下 p は素数、 G は(無限)アーベル p 群とする。したがって各元の位数は p のべきである。また A は G の部分群とする。 $G[p]$ は位数高々 p の元のなす部分群を表わす。

すべての p のべき q にたいして、 $A \cap qG = qA$ が成り立つとき、 A を純部分群 (pure subgroup) という。 A を含む最小の純部分群 (純粋包) が存在するとき、 A を純化可能 (purifiable) 部分群という。純部分群は、直和因子の概念の拡張で、アーベル群論における最も重要な概念のひとつである。次が申請者が得た純化可能性の本質的な必要条件を与えた定理である。

定理: A が純化可能なら、ほとんどすべての突出部が 0 である。

ここで突出部 (overhang) とは、申請者が導入した新しい不変量であり、その有効性がアーベル群論の分野で急速に認められつつある。この方面の中心的研究課題である neat 部分群や residual 部分群との関係も、申請者やカナダのグループの研究で浮かび上がってきた。純化可能部分群 A の純粋包の有界直和因子を A の剰余

部分群という。これに関して申請者は次の重要な結果を証明した。

定理：純粋包の剰余部分群は同型を除いて一意的に定まる。

(この定理は、アーベル群論の世界的研究者であるモントリオール大学のベンアブダラ教授との共著の論文で発表されるが、この定理を証明したのは申請者である。)

申請者が導入した別の重要な概念として準純化可能部分群がある。これは、純粋包の定義における最小、というところをほとんど密、という位相的条件で置き換えて、準純包を定義し、それを用いて同様に定義される。これは本学位論文の中心的研究対象となった重要な概念である。申請者は学位論文などで、純化可能部分群の場合とはば対応する結果が得られることを示した。例えば、上で述べた定理の拡張を証明している。すべての場合に対応する結果があるわけではなく、そのため多くの興味ある問題を提起している。

有限個の純部分群の共通部分の特徴付けを、共通部分問題という。これはフックスの有名な本の中で、重要な未解決問題としてあげられている問題である。申請者はこれに対して次のような十分満足できる解答を与えた。

定理： G の reduced 部分が準完全とする。このとき、 G の部分群 A が有限個の純部分群の共通部分であるための必要十分条件は次で与えられる：

$$\text{Def}(G, A) \leq \text{Com}(G, A)$$

ここで、不足次元 $\text{Def}(G, A)$ と補次元 $\text{Com}(G, A)$ は、 K を不完全準純粋包としたとき、それぞれ $(K/A)[p]$ と $(G/K)[p]$ の次元として定義される。

純粋包を使った次元では、このような美しい結果は出てこない。申請者の導入した突出部と準純化可能部分群の概念の最大の応用がここにある。

以上のように、本論文は多くの独創的なアイデアと重要で新しい結果を多数含むものであり、アーベル群論への貢献は大きい。また参考論文も国際的に高い評価を得ている。よって審査員一同は、申請者が理学博士の学位を受けるのに十分な資格があるものと認める。